

PLANEETWIELSTELSELS

Ing. P. Blok
ENKA Research Instituut,
Arnhem

Beschreven wordt een grafische methode voor het berekenen van de overbrengingsverhoudingen en de krachten bij planeetwielstelsels.

De heer Blok heeft deze methode voor Mikroniek samengevat naar aanleiding van de besproken tandwielkast in de afleveringen mei-1978, bladzijden 119-125, en juni-1979, bladzijden 160-161.

Inleiding

Deze tandwielstelsels zijn bij vele instrumentenbouwers en ontwerpers bekend. Vaak echter alleen als de stelsels waar men zo weinig van begreep als ze werden uitgelegd door een goedwillende leraar! In de praktijk ging men er later vaak met een grote boog omheen.

Juist deze stelsels kunnen echter de oplossing geven voor een, op andere wijze, niet of nauwelijks oplosbaar vraagstuk in de aandrijftechniek.

Met een planeetstelsel kan men onder meer op eenvoudige wijze toerentallen van twee verschillende assen optellen of aftrekken. Op deze wijze kunnen overbrengingsverhoudingen worden bereikt die op andere wijze niet of zeer ingewikkeld geconstrueerd kunnen worden. Dit geldt zeker als een van de deelnemende assen niet eenparig roteert maar bijvoorbeeld via een nokkensysteem een variabel toerental krijgt opgelegd.

Een tweede toepassing is de verdeling van een vermogen over twee assen zoals in het autodifferentieel gebeurt.

Een derde veel gebruikte toepassing is als reductiekast, waarbij in een klein volume grote overbrengingsverhoudingen en vermogens worden ondergebracht.

De bepaling van de overbrengingsverhouding van een stelsel en het begrip ervan worden vaak moeizaam uitgelegd.

Door gebruik te maken van de in dit artikel beschreven methode, is dit echter eenvoudiger te begrijpen en te doorzien.

Verder wordt er nog iets gezegd over de optredende krachten in een systeem.

Tot slot een summiere opsomming van enige toepassingen.

Planeetwielstelsels

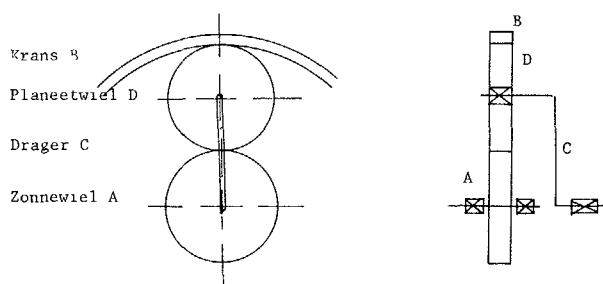
Een planeetstelsel is in zijn eenvoudigste vorm opgebouwd als aangegeven in figuur 1.

Op een gelagerde as zit het zonnewiel A, vast aan de as bevestigd. Aan de buitenzijde bevindt zich de inwendig vertande krans B. Deze kan vast bevestigd zijn aan het huis van de aandrijving, maar er zijn ook uitvoeringen waarbij deze tandkrans kan roteren om het middelpunt van het zonnewiel, zonder hiermede vast verbonden te zijn.

Tussen zonnewiel A en de krans B bevinden zich een of meer planeetwielen D, deze grijpen dus zowel op A als op B in. Planeetwiel D roteert vrij om een as bevestigd aan de planeetwieldrager C. Deze drager roteert om het middelpunt van het zonnewiel zonder hiermede verbonden te zijn.

Gebruik makend van de geschetste mogelijkheden krijgen we het volgende overzicht:

1. Wiel A drijft drager C aan, via D, de krans B staat vast.
2. Krans B drijft drager C aan, het zonnewiel A staat vast.
3. Het zonnewiel A en de krans B drijven tegelijkertijd het wiel D aan, en dus de drager C.



Figuur 1.

4. De drager C drijft via wiel D het zonnewiel A aan, de krans B staat vast.
5. De drager C drijft de krans B aan, het zonnewiel staat vast.
6. Het is mogelijk om in de plaats van één planeetwiel D er twee toe te passen, op dezelfde as en aan elkaar gekoppeld maar met verschillende diameters. De bepaling van de overbrengingsverhouding gaat dan op dezelfde wijze als voor één planeetwiel wordt toegelicht, maar rekening houdend met de verschillende diameters.
7. Een andere uitvoering is aangegeven in figuur 7 waarbij twee planeetwielen gekoppeld draaien om een as welke door de drager om twee zonnewielen wordt bewogen.
8. De toepassing van kegelwielen in plaats van rechte tandwielen geeft weer andere mogelijkheden, waarvan een uitvoering wordt beschreven.

Bepaling van de overbrengingsverhouding

We tekenen nu steeds, naast de geschetste overbrenging, een assenstelsel waarbij we verticaal de afstanden tot het hart van het planeetwielstelsel uitzetten en horizontaal de absolute snelheid van de bewegende delen.

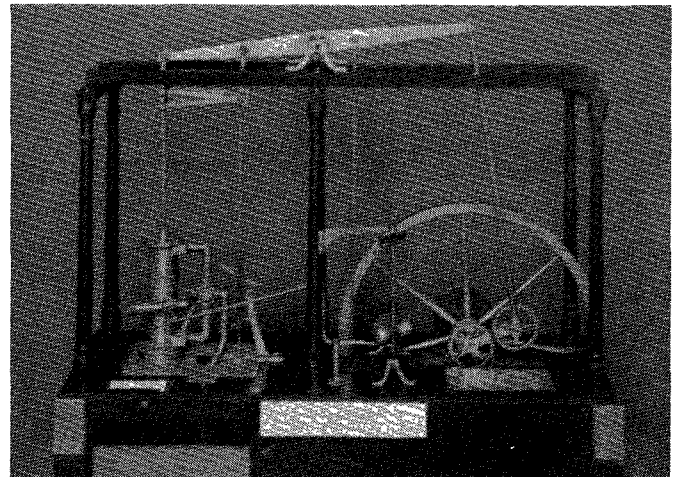
De absolute snelheid V_{abs} is de snelheid van het beschouwde punt van een wiel of as ten opzichte van de stilstaande aarde.

Deze snelheid kan samengesteld worden uit de *sleepsnelheid* V_{sl} waarmee bij voorbeeld een planeetwiel D op de drager C wordt rondgesleept ten opzichte van de aarde en de *rotatiesnelheid* V_{rot} van dat punt ten opzichte van zijn eigen middelpunt.

Alle als vectoren uitgezet en opgeteld dus:

$$\vec{V}_{abs} = \vec{V}_{sl} + \vec{V}_{rot}$$

Verder geldt de bekende betrekking dat $V = \omega R$ ω is de hoeksnelheid in rad/s en R is de straal.



Klassieke planeetwielconstructie. James Watt, 1736-1819, doet 'zijn' vlieg wiel op een dubbele snelheid draaien met behulp van een planeet-tandwiel, bevestigd aan de verticale drijfstaang. Contemporain model in het Musée d'histoire des sciences te Genève.

Geval 1

A drijft C aan, B vast – figuur 2 –. In het diagram is V_A de absolute snelheid van een punt aan de omtrek van A loodrecht boven de as genomen en afgezet als de vector V_A .

$$V_A = \omega_A \cdot R_A \quad \omega_A = 2\pi n \text{ rad/s als } n = \text{aantal omw./s.}$$

$V_B = 0$, want B staat in dit geval immers stil.

Het planeetwiel D heeft nu aan de bovenzijde de snelheid $V_B (=0)$ en aan de onderzijde de snelheid V_A .

Verbinden we in het assenstelsel de eindpunten van de vectoren V_A en V_B dan wordt de absolute snelheid van elk punt van D weergegeven door de lengte van de vector daar ter plaatse.

Zijn middelpunt op afstand R_C van het centrum beweegt dus met de absolute snelheid V_C .

Nu geldt ook dat $V_C = \omega_C \cdot R_C$

De gevraagde overbrenging is:

$$i_1 = n_A/n_C = \omega_A/\omega_C$$

Bekijken we in figuur 2 de gearceerde driehoeken dan is de overbrengverhouding als volgt te bepalen:

Het lijnstuk $EF = \omega_C \cdot R_B$ en: $GH = (\omega_A - \omega_C)R_A$.

De gearceerde driehoeken zijn congruent. Nu geldt:

$$\omega_C R_B = (\omega_A - \omega_C)R_A$$

$$\omega_A R_A = \omega_C (R_A + R_B)$$

$$i_1 = \frac{\omega_A}{\omega_C} = \frac{R_A + R_B}{R_A} = \frac{Z_A + Z_B}{Z_A}$$

als Z het aantal tanden aangeeft.

$$\text{Of: } i_1 = 1 + Z_B/Z_A$$

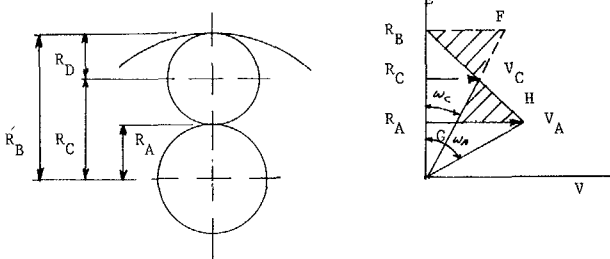
Geval 2

B drijft C aan, A staat vast – figuur 3 –.

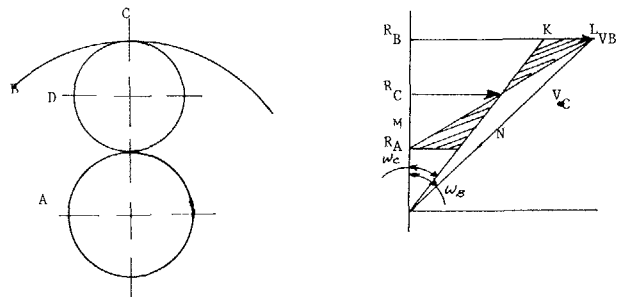
Weer geldt: $V_A = 0$. A staat stil.

$$V_B = \omega_B \cdot R_B \quad V_C = \omega_C \cdot R_C$$

Gevraagd is $i_2 = \omega_B/\omega_C$



Figuur 2.



In de gearceerde congruente driehoeken geldt:

$$KL = (\omega_B - \omega_C)R_B \text{ en } MN = \omega_C \cdot R_A$$

$$\text{nu geldt: } (\omega_B - \omega_C)R_B = \omega_C \cdot R_A$$

$$\text{en } \omega_B R_B = \omega_C (R_A + R_B)$$

$$i_2 = \frac{\omega_B}{\omega_C} = \frac{R_A + R_B}{R_B} \text{ of } \frac{Z_A + Z_B}{Z_B}$$

$$\text{Of: } i_2 = 1 + Z_A/Z_B$$

Uit de diagrammen volgt ook direct dat de richting van de vector V_C altijd gelijk is aan die van V_A of V_B m.a.w. de assen draaien in dezelfde richting.

De gevallen 4 en 5 zijn gelijk aan respectievelijk 1 en 2.

Alleen zijn de drijvende en de gedreven assen verwisseld. De afleiding is dus gelijk, maar de overbrenging wordt anders van waarde.

$$i_4 = \frac{\omega_C}{\omega_A} = \frac{Z_A}{Z_A + Z_B} = \frac{1}{i_1}$$

$$i_5 = \frac{\omega_C}{\omega_A} = \frac{Z_B}{Z_A + Z_B} = \frac{1}{i_2}$$

Het is hierbij van belang om goed op de juiste notatie te letten. De teller is altijd de ingaande drijvende as, de noemer steeds de uitgaande of gedreven as.

Stel bijv. $Z_A = 20$ en $Z_B = 80$

$$\text{Dan is } i_1 = \frac{Z_A + Z_B}{Z_A} = \frac{20 + 80}{20} = 5, \text{ dus vertragend,}$$

$$\text{maar } i_4 = \frac{Z_A}{Z_A + Z_B} = \frac{20}{20 + 80} = \frac{1}{5}, \text{ dus versnellend.}$$

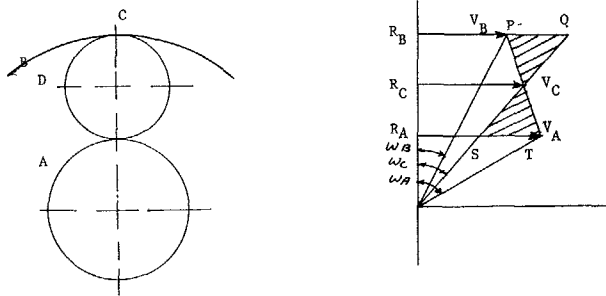
Dit volgt ook uit de diagrammen als U let op de grootte van ω_A en ω_C .

Geval 3

A en B drijven C aan – figuur 4 –.

a. We nemen het geval waarin A en B dezelfde richting op draaien.

In de congruente driehoeken geldt weer:



Figuur 4.

$$P_Q = (\omega_C - \omega_B)R_B \text{ en } S_T = (\omega_A - \omega_C)R_A$$

Men kan nu moeilijk van een overbrengingsverhouding spreken omdat zowel A als B roteren.

Wel kunnen we de hoeksnelheid ω_C bepalen:

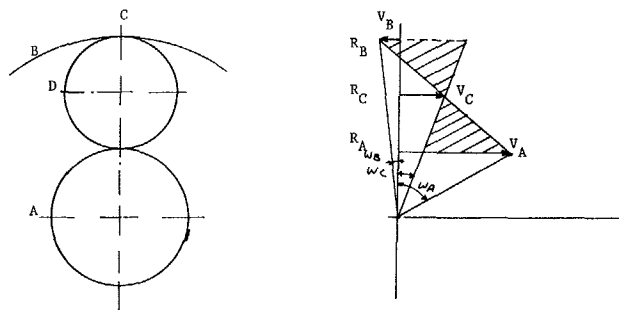
$$(\omega_C - \omega_B)R_B = (\omega_A - \omega_C)R_A$$

$$\omega_C(R_B + R_A) = \omega_A R_A + \omega_B R_B$$

$$\omega_C = \frac{\omega_A R_A + \omega_B R_B}{R_A + R_B} = \omega_A \cdot \frac{R_A}{R_A + R_B} + \omega_B \cdot \frac{R_B}{R_A + R_B} = \frac{\omega_A}{i_1} + \frac{\omega_B}{i_2}$$

We tellen nu in feite twee snelheden bij elkaar op om een derde V_C te verkrijgen.

b. Aftrekken is ook mogelijk als we namelijk V_A en V_B niet naar dezelfde richting laten verlopen – figuur 5 –.



Figuur 5.

Uit de driehoeken volgt:

$$(\omega_A - \omega_C)R_A = (\omega_B + \omega_C)R_B$$

$$\omega_C(R_B + R_A) = \omega_A R_A - \omega_B R_B$$

$$\omega_C = \frac{\omega_A R_A - \omega_B R_B}{R_A + R_B} = \frac{\omega_A}{i_1} - \frac{\omega_B}{i_2}$$

De grootte en richting van ω_C wordt dus bepaald door de grootte van ω_A en ω_B .

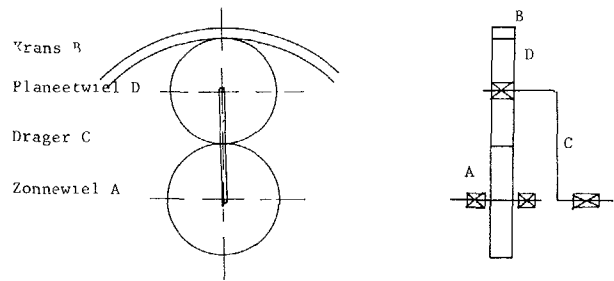
Er zijn wat extreme gevallen namelijk:

als $\omega_A = 0$ dan is dus $i_2 = -\omega_B/\omega_C$, dit wil zeggen C is ook linksom gaande in de negatieve zin zoals B.

Verder $\omega_B = 0$ Dan is dus $i_1 = \omega_A/\omega_C$ rechtsom gaande.

Ook is mogelijk: $\omega_C = 0$, namelijk als $\omega_A/i_1 = \omega_B/i_2$.

Dit alles is duidelijk uit de diagrammen te zien.



Figuur 1 – herhaald –.

Geval 4 en 5

Zie vorige pagina.

Geval 6

Nu zijn er twee planeetwielen van verschillende diameters gekoppeld en op dezelfde as op drager C bevestigd.

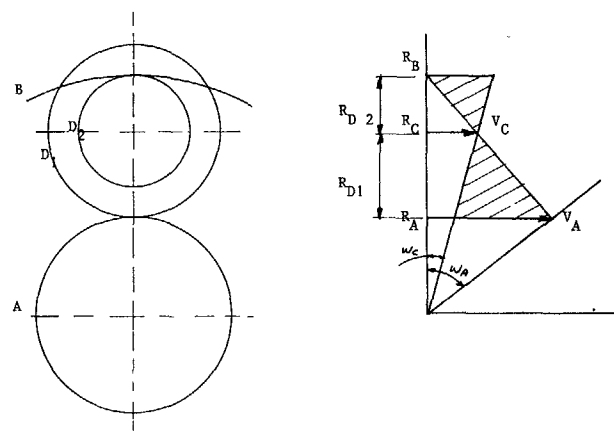
Laten we het volgende aannemen zoals in het behandelde geval 1 – figuur 6 –:

Wiel A drijft D_1 aan.

Krans B staat stil en is in ingrijping met D_2 .

De drager C wordt aangedreven.

We tekenen dan weer het assenstelsel rekening houdend met de diverse stralen van de wielen.



Figuur 6.

In de gelijkvormige driehoeken geldt:

$$(\omega_A - \omega_C)R_A : R_{D1} = \omega_C R_B : R_{D2}$$

$$\omega_A R_A R_{D2} - \omega_C R_A R_{D2} = \omega_C R_B R_{D1}$$

$$\omega_C / R_B R_{D1} + R_A R_{D2} = \omega_A R_A R_{D2}$$

en dus is:

$$\frac{\omega_A}{\omega_C} = \frac{R_B \cdot R_{D1} + R_A \cdot R_{D2}}{R_A \cdot R_{D2}} = \frac{R_B \cdot R_{D1}}{R_A \cdot R_{D2}} + 1$$

Geval 7

Bekijken we vervolgens een aandrijving met twee planeetwielen D en E gekoppeld draaiend om een gezamenlijke as, welke as op de arm C rond twee zonnewielen A en B wordt bewogen – figuur 7 –.

Een dergelijke aandrijving wordt onder meer toegepast in diverse speciale uurwerken.

Zonnewiel A krijgt een continue-beweging.

De arm C wordt bijvoorbeeld via een nokkenmechanisme bewogen, dus niet eenparig.

De beweging van B is nu de som of het verschil van de bewegingen van A en C waarbij ook de verhouding van wioldiameters een rol speelt.

Elk punt van D en E is onderworpen aan twee bewegingen, namelijk een sleepsnelheid ten gevolge van de draaiing van C en een rotatiesnelheid ten gevolge van de draaiing van wiel A.

Het midden van D beweegt met $V_C = ST$ en de omtrek van D heeft de snelheid $V_A = PQ$.

De absolute snelheid van een punt van D of E wordt dus weergegeven door de vectorlengte vanaf de verticale as tot de lijn TQ.

Op het raakpunt van E en B genomen is dit dan V_B .

Voor de afleiding van de overbrengingsverhouding trekken we de hulplijn SQ die V_B verdeelt in V_{B1} en V_{B2} .

De hoeksnelheid ω_B is nu als volgt af te leiden:

$$V_B = V_{B1} + V_{B2}$$

In driehoek SPQ geldt: $V_{B1}/V_A = R_E/R_D$

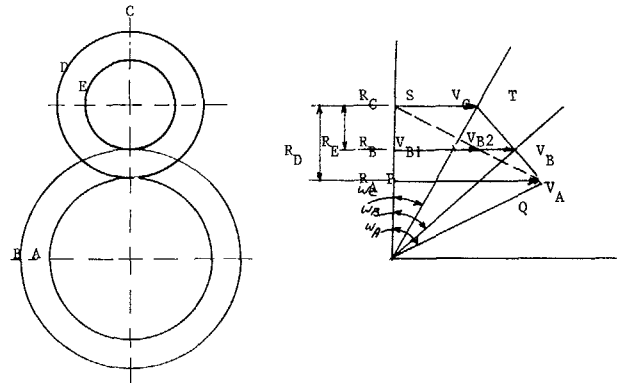
$$V_{B1} = V_A \cdot R_E/R_D$$

In driehoek QST geldt:

$$\frac{V_{B2}}{V_C} = \frac{R_B - R_A}{R_D} \quad \text{en} \quad V_{B2} = \frac{V_C(R_B - R_A)}{R_D}$$

$$V_B = \omega_B R_B = V_{B1} + V_{B2} = \frac{V_A \cdot R_E}{R_D} + \frac{V_C \cdot (R_B - R_A)}{R_D}$$

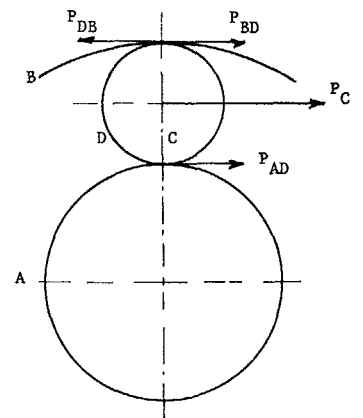
$$\omega_B = \frac{\omega_A \cdot R_A \cdot R_E + \omega_C R_C (R_B - R_A)}{R_B \cdot R_D}$$



Figuur 7.

De optredende krachten in het systeem

Het is van belang om daar ook aandacht aan te schenken. Uitgaande van het eerste systeem geldt het volgende – figuur 9 –: A drijft C aan en B staat vast.



Figuur 9.

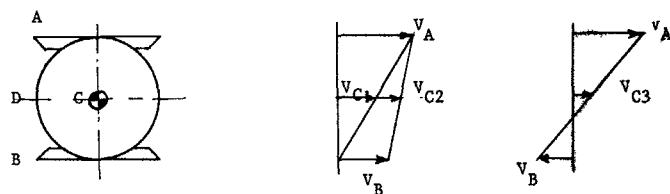
Geval 8

Tenslotte een differentieel met kegelwielen – figuur 8 –.

Dit moeten we iets anders tekenen:

Als we aannemen dat de aandrijving plaats vindt via de wielen A en/of B, en C met het derde wiel het gedreven deel is.

Andersom kan ook, zoals dit uitgevoerd is in het differentieel van een auto.



Figuur 8.

De verticale lijn in het snelheidsdiagram is de gemeenschappelijke draaiingsas.

De snelheden worden daar nu loodrecht op afgezet.

Stel B staat stil en A is aangedreven.

Dan zien we dat $V_{C1} = V_A/2$ – eerste diagram –.

Als B ook aangedreven is dan blijkt dat:

$V_{C2} = (V_A + V_B)/2$ – eveneens eerste diagram –.

Als B tegengesteld draait aan A geldt:

$V_{C3} = (V_A - V_B)/2$ – tweede diagram –.

Op deze wijze is optellen en aftrekken van snelheden erg eenvoudig te verwezenlijken.

Door A wordt op D een kracht uitgeoefend: P_{AD} .

Daardoor wordt door D een kracht P_{DP} uitgeoefend op B en deze is gelijk aan P_{AD} .

Als reactie oefent B een kracht P_{BD} uit op D.

$$P_{BD} = P_{DB} = P_{AD}$$

Op arm C komt dus uiteindelijk de kracht:

$$P_C = P_{AD} + P_{BD} = 2 P_{AD}$$

De overbrengverhouding is: $i = \omega_A/\omega_C = n_A/n_C = T_C/T_A$

Het koppel $T_C = P_C \cdot R_C$ en $T_A = P_A \cdot R_A$

Als B ook draait in dezelfde richting als A worden ook door B krachten uitgeoefend op D en uiteindelijk op C. De ingaande vermogens van A en B worden nu opgeteld.

Toepassingen

Een opsomming hiervan is altijd onvolledig maar een paar wil ik toch noemen:

1. Ouderwetse slagroomklopper; B staat vast, C is aangedreven. De garden zitten aan de planeetwielen D.
2. Planetaire verdragingskasten in kleine en zeer grote vermogens.
3. Aandrijvingen in klokken en mechanische planetaria.
4. Auto differentieel.