

De vreemde wereld van materialen met een negatieve brekingsindex

B.J. Hoenders • Theoretische Fysica, RU Groningen

1 Inleiding

De theorie van de brekingsindex leert ons dat de brekingsindex n van een (homogeen) medium gelijk is aan de verhouding van de voortplantingssnelheid van het licht buiten het medium en de voortplantingssnelheid van het licht in het medium. Aangezien de voortplantingssnelheid van het licht in een medium altijd kleiner is dan die in vacuüm is de brekingsindex dus altijd positief en groter dan 1.

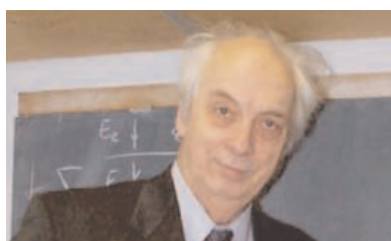
Niet eens zo recentelijk heeft men zich eens afgevraagd wat er toch zou kunnen gebeuren indien de brekingsindex *negatief* zou zijn, [1]. Deze gedachte lijkt alleen te leiden tot puur theoretische resultaten gezien de boven gegeven interpretatie van de brekingsindex. Echter, deze is minder absurd als dat het op het eerste gezicht lijkt. Bedenk eens dat de brekingsindex n volgens de Maxwell theorie als volgt samenhangt met de dieëlectrische- en magnetische permeabiliteit ϵ en μ :

$$n^2 = \epsilon\mu \quad (1)$$

Essentieel is dat het *kwadraat* van n uit de theorie volgt, en niet n . Dat lijkt weliswaar een detailpunt, want n is dus of plus of min de wortel van $\epsilon\mu$, en aangezien de snelheden van licht in vacuüm en een “gewoon” medium altijd positief zijn, moeten we de positieve wortel nemen. De formele theorie lijkt dus de mogelijkheid van een negatieve brekingsindex open te laten. De interpretatie van een negatieve brekingsindex is dan, dat één van de twee mogelijke optredende (fase)snelheden van het licht negatief is t.o.v. de voortplantingsrichting van het energietransport. Of anders gezegd, de (fase)snelheid van de golf is in het medium tegengesteld aan die van de fasesnelheid van de golf buiten het medium en aan de richting van de energiestroom. Deze gedachte is door [1] uitgewerkt, en wij zullen in het vervolg de vele merkwaardige consequenties van “ n is negatief” verder uitwerken. Uitgebreide overzichten betreffende de recente stand van zaken kan men vinden in de overzichtsartikelen [2] en [3].

2 Geschiedenis

Opmerkelijk is dat het verschijnsel van wat nu bekend staat als “backward wave”, d.w.z. een golf waarvan de richting van de fasesnelheid, (de snelheid waarmee de vlakken van constante fase bewegen), tegengesteld is aan de richting waarin de energie zich voortplant, al in 1904 door Lamb [4] en Schuster [5] is beschreven. Lamb beschouwde enige mechanische systemen, en één van deze was een cilinder met een groot aantal inkepingen rondom de cilindermantel die tot aan bijna de as van de cilinder gaan. Dit systeem, reeds door Rayleigh geanalyseerd, [6], [7], heeft met een goede keuze van de systeempa-



Figuur 1. De russische fysicus Veselago die visionair de eigenschappen van media met een negatieve brekingsindex heeft geanalyseerd.

rameters *altijd* een negatieve groepsnelheid, c.q. de richting van de fase en groepsnelheid *zijn altijd* verschillend! Een volledig historisch overzicht vindt men op de site <http://www.wave-scattering.com/index.htm> van A. Moroz.

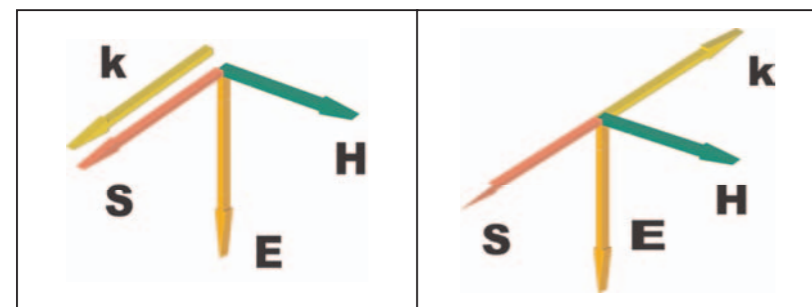


Bernhard Hoenders studeerde Technische- en Theoretische natuurkunde aan de Rijksuniversiteit Groningen en promoveerde daar op een onderzoek naar de beeldvorming in elektronenmicroscopen. Hij is als UHD verbonden aan het Centrum voor Theoretische Natuurkunde en het Material Science Centre, (MSC). De laatste jaren concentreert zijn onderzoek zich op de eigenschappen van fotonische kristallen en de interactie van elektromagnetische straling met weefsels.

E-mail: b.j.hoenders@rug.nl

3 Veselago's Analyse van materialen met een negatieve brekingsindex

Uitgangspunt van Veselago was een simpele analyse van de vlakke golfoplossingen van de Maxwell vergelijkingen. Indien de diëlectrische- en magnetische permeabiliteiten ϵ en μ beide positief zijn, vormen de elektrische- en magnetische veldvectoren en de golfvector een rechtshandig systeem. Als ϵ en μ beide negatief zijn, vormen deze vectoren een linkshandig systeem! (Dit ziet men onmiddellijk in door de vlakke golfoplossing in de Maxwellvergelijkingen te substitueren, zie (4)). In de literatuur worden deze media daarom linksdraaiende media genoemd, hetgeen vaak verwarring veroorzaakt met het gebruik van deze term voor optisch actieve media. De golfvector k geeft de voortplantingsrichting aan van de vlakken van constante fase, de fasefronten. Dit betekent dus dat de voortplantingsrichting van de fasefronten in materialen, waarvoor geldt dat ϵ en μ beide negatief zijn, tegengesteld is aan die van de voortplantingsrichting in "gewone" materialen. Ofwel anders gezegd: de fase snelheid is negatief. Dit verklaart dus ogenblikkelijk het (mogelijke) voorkomen van materialen met een negatieve brekingsindex n : de brekings index is weliswaar de verhouding van twee(fase)snelheden, maar één ervan is negatief. Verder merken we op dat de Poynting vector, die de richting en grootte van de energiestroom beschrijft, in dezelfde richting blijft wijzen, zie figuur 2.

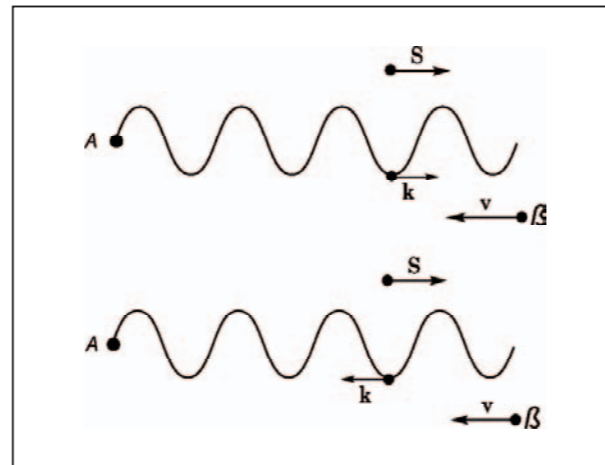


Figuur 2. De elektrische en de magnetische veldvectoren E en H en de golfvector k .

We hebben ons tot nog toe niet bezig gehouden met de vraag of deze materialen eigenlijk wel bestaan, en een negatieve brekingsindex dus een theoretisch hersenspinsel is. Echter, sinds 1995 kunnen materialen met deze eigenschappen worden gemaakt. Een voorbeeld hiervan zijn de zgn. "split ring resonatoren", zie de figuur 3. Sindsdien is er een snel ontwikkelend vakgebied ontstaan, dat bekend staat onder de naam van "metamaterialen".

We zullen nu kijken wat voor merkwaardige gevolgen een negatieve fasesnelheid heeft. Opmerkelijk is dat Veselago ± 40 jaar geleden deze verschijnselen al heeft voorspeld.

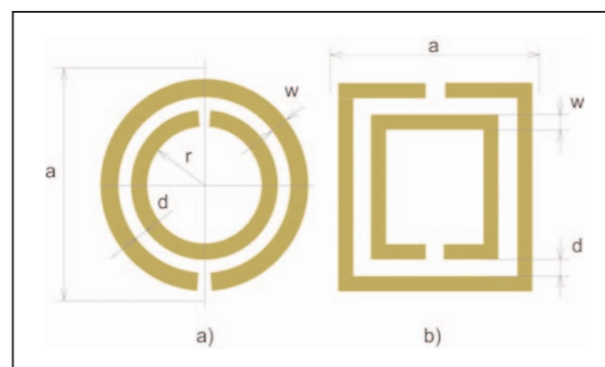
a) We beginnen met de beschouwing van het Doppler effect: Hiervoor geldt dat het Doppler effect "omkeert": een bron die naar de waarnemer toe beweegt zal een lagere frequentie hebben voor de waarnemer, dan een bron die zich van de waarnemer verwijdert. Dit gedrag is direct duidelijk indien men de figuur 4 beschouwt en opmerkt dat t.g.v. de negatieve fase snelheid de punten met gelijke fase de andere kant op bewegen dan die van een "gewoon" materiaal.



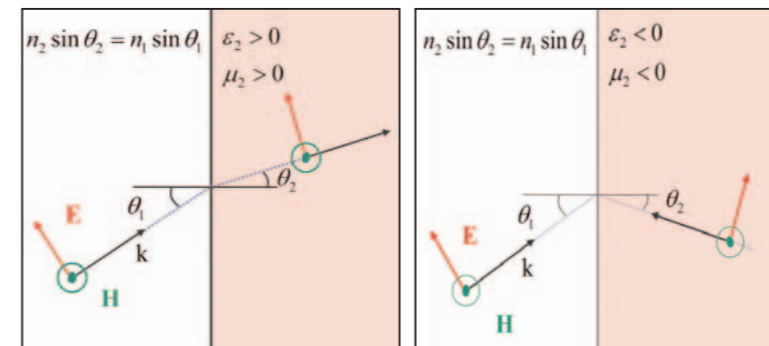
Figuur 4. De letter A representeert de bron, en de letter B de bewegende detector. De bovenste tekening beschrijft het gewone Doppler effect, de onderste beschrijft het Doppler effect voor linkshandige media.

b) Een volgende consequentie van een negatieve brekingsindex is, dat weliswaar de wet van Snellius nog geldig is, maar dat de invallende- en gebroken straal zich aan dezelfde kant van de normaal bevinden.

c) Indien een geladen deeltje door een medium loopt met een snelheid groter dan die van de fasesnelheid $\frac{c}{n}$ (c = de lichtsnelheid) van de golven in dat medium, zal zo'n deeltje een hoeveelheid straling genereren gelegen binnen een kegel met openingshoek Θ_c volgend uit de vgl.: $\cos(\Theta_c) = \frac{c}{nv}$, waarbij n de brekingsindex van het materiaal is en v de snelheid van het deeltje. Men ver-

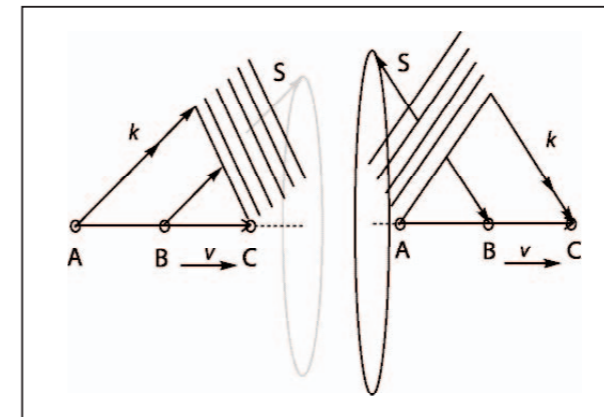


Figuur 3. "Splitring" resonatoren



Figuur 5. De linker figuur beschrijft de brekingswet van Snellius voor een medium met positieve brekingsindex, en de rechter figuur voor een medium met een negatieve brekingsindex.

ling genereren gelegen binnen een kegel met openingshoek Θ_c volgend uit de vgl.: $\cos(\Theta_c) = \frac{c}{nv}$, waarbij n de brekingsindex van het materiaal is en v de snelheid van het deeltje. Men ver-



Figuur 6. De linker figuur toont de Cherenkov kegel voor een medium met positieve brekingsindex en de rechter figuur voor een medium met negatieve brekingsindex.

krijgt precies hetzelfde verschijnsel indien men kijkt naar de oppervlaktegolven gegenereerd door een speedboot die met grotere snelheid vaart dan de fasesnelheid van de oppervlaktegolven in water. Als we weer bedenken dat het kernverschijnsel het negatief zijn van de fasesnelheid is, dus dat het geladen deeltje vlakke golven genereert die naar achteren lopen, dan is het in het geval van een medium met een negatieve brekingsindex direct te begrijpen dat de openingshoek van de Cherenkov kegel naar achteren is gericht.

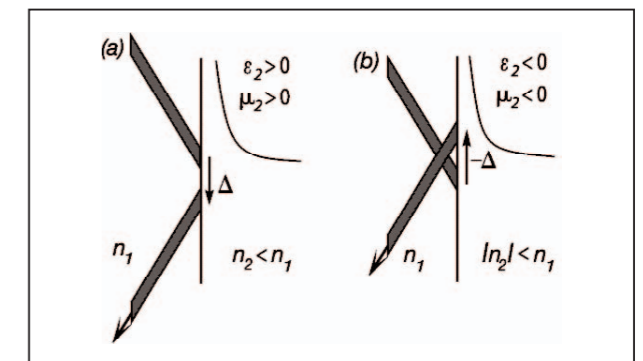
d) Als een vlakke golf totaal wordt gereflecteerd door een vlakke plaat, dan zijn de gereflecteerde- en inkomende straal een klein beetje t.o.v. elkaar verschoven. Deze verschuiving vindt plaats in de richting van de projectie van de golfvector van de inkomende bundel op het oppervlak en is positief voor "gewone media". Dit noemt men het Goos-Hänchen effect. Voor materialen met een negatieve brekingsindex is deze verschuiving echter negatief.

e) Een van de meest opmerkelijke consequenties van materialen met een negatieve brekingsindex is de realisatie van een ideale lens! We willen eerst nog opmerken dat als we de breking beschouwen van een willekeurige vlakke golf invallend vanuit een medium met (positieve) ϵ_1 en μ_1 aan een vlakke plaat gemaakt van een linkshandig materiaal met materiaalconstanten:

$$\epsilon_2 = -\epsilon_1 \text{ en } \mu_2 = -\mu_1 \quad (2)$$

dat er dan geen gereflecteerde golf ontstaat.

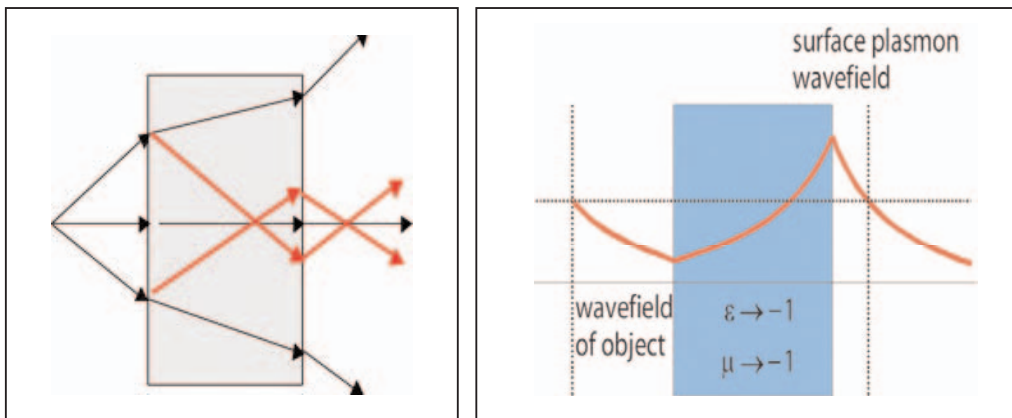
Deze opmerking kan direct worden gecontroleerd indien we (2) substitueren in de Fresnel reflectiecoëfficiënt. Verder zien we dat de figuur 5 het verschil aangeeft tussen het stralenverloop door een linkshandig medium en een gewoon medium. Let er speciaal op dat het verloop van de invallende- en gebroken straal aan dezelfde kant van de normaal plaatsvindt! De ideale afbeelding heeft aanleiding gegeven tot verhitte debatten in de literatuur, [8], [9]. Ideale afbeelding betekent o.a. dat er geen diffractielimiet meer bestaat, en we moeten ons dus afvragen welk fysisch mechanisme voor gewone media leidt tot de diffractielimiet.



Figuur 7. De linker figuur toont het Goos-Hänchen voor een medium met positieve brekingsindex en de rechter figuur voor een medium met negatieve brekingsindex.

De verklaring van de diffractielimiet gaat als volgt. Stel, we plaatsen een stralende dipool voor een lens. Deze dipool geeft aanleiding tot een stralingsveld dat d.m.v. een superpositie van vlakke golven kan worden beschreven. Deze superpositie van vlakke golven bevat zowel propagerende golven als niet-propagerende golven, die bekend staan als "evanescent waves". Zo'n golf wordt bijvoorbeeld gegenereerd aan de buitenkant van een medium als een vlakke golf totaal wordt gereflecteerd aan de binnenkant van het grensvlak medium - ($n > 1$) buitenwereld. Een ander voorbeeld van uitdovende golven zijn de

modi die men door een (rechthoekige) golfgeleider kan sturen. Daarvan is bekend dat slechts een eindig aantal propageert (stralende modes) en, indien de oscillaties van de modi aan het beginvlak van de golfgeleider te groot worden dan propageert de golfgeleider de mode niet meer. De golfgeleider gedraagt zich dus als een “Low-pass” filter. Zie de appendix voor verdere details.



Figuur 8. De figuur links laat de stralengang in de ideale lens en in een gewoon medium zien. De versterking van uitdovende golven door plasmonen ziet men in de figuur rechts.

Het centrale punt waar het hier nu om gaat is de vraag hoe het toch mogelijk is dat de uitdovende vlakke golven kennelijk weer worden opgepept. De verklaring hiervoor is dat er aan het oppervlak van de plaat zgn. “plasmonen” worden opgewekt. Dit zijn oppervlakte modi die in *resonantie* met het inkomende veld worden aangedreven, zie figuur 8. De resonantie zorgt voor het “oppeppen” van de uitdovende golven. Als dit wat vreemd klinkt, kunnen we wijzen op een analogon uit de electrostatica: Beschouw het electrostatische veld veroorzaakt door een puntlading q die zich bevindt in een medium gekarakteriseerd door ϵ_1 , en op een afstand d staat van een halfruimte gekarakteriseerd door ϵ_2 . De beeldlading q_1 in medium 1 heeft dan de sterkte $q_1 = q \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$, en de beeldlading in medium 2 heeft dan de sterkte $q_2 = q \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$. De beeldladingsterkte wordt dus ∞ als $\epsilon_1 = -\epsilon_2$!!

4 Elektrische netwerken en “backward waves”

Een leuk electrisch analogon van de optische linkshandige materialen wordt geïllustreerd aan de hand van een transmissielijn zoals beschreven in de figuur 9. De analogie kan als volgt worden aangetoond: voor een transmissielijn gelden de volgende vergelijkingen voor de het voltage V en de stromen I_x en I_y :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Z I_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Z I_y \quad \text{en} \quad \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial y} = Y V \quad (3)$$

Hierbij zijn Z en Y de impedantie en admittantie van de transmissielijn. Voor een TE electromagnetische golf waarbij de E_z component van het veld loodrecht staat op de golfvector

geldt volgens de Maxwell vergelijkingen:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = i\omega\mu H_y, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = i\omega\mu H_x, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\epsilon E_z \quad (4)$$

Als we de volgende afbeeldingen maken:

$V \rightarrow E_z$, $I_x \rightarrow -H_y$, $I_y \rightarrow H_x$, en verder Z en Y als volgt met de materiaalparameters ϵ en μ identificeren:

$$Z = i\omega\mu, \quad Y = \frac{1}{i\omega\epsilon} \quad (5)$$

dan zien we de equivalentie tussen een transmissielijn en een electromagnetische vlakke golf!

Het verband tussen de frequentie ω en het golfgetal k , ofwel de dispersierelatie, ziet er als volgt uit voor de transmissielijn a:

$$k^2 = \omega^2 LC \quad (6)$$

en leid dus tot $\omega LC = \pm k$, waarbij we nog een keuze hebben welk teken we kiezen! De snelheid waarmee het fasefront zich voortplant $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$, (de fasesnelheid), is gelijk aan $v_\varphi = \pm \frac{1}{L}$, en de groepssnelheid v_g , gedefiniëerd door:

$$v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (7)$$

ofwel de snelheid waarmee een golfpakketje en de energie zich voortplanten in de transmissielijn is gelijk aan $\pm \frac{1}{L}$. Dus voor de gewone transmissielijn hebben de energiestroom en de fasefronten dezelfde voortplantingsrichting. Deze resultaten zijn welbekend voor electromagnetische vlakke golven. De

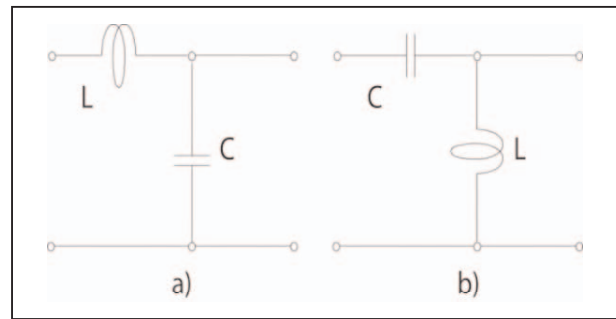
lezer zou de bovenvermelde resultaten voor de transmissielijn eens kunnen omwerken voor soortgelijke resultaten voor een vlakke golf, gebruikmakende van de substituerelaties $V \rightarrow E_z$, $I_x \rightarrow -H_y$, $I_y \rightarrow H_x$, etc.. Voor de transmissielijn a geldt dat $Z = i\omega L$ en $Y = \frac{1}{i\omega C}$, en voor de transmissielijn b geldt dat $Y = i\omega L$ en $Z = \frac{1}{i\omega C}$. De transmissielijn b is zo te herleiden vanuit de transmissielijn a door middel van de afbeeldingen $L \rightarrow C^{-1}$, $C \rightarrow L^{-1}$, en de allerbelangrijkste substitutie: $\omega \rightarrow \omega^{-1}$!! Deze laatste substitutie is zo belangrijk omdat deze impliceert dat de dispersierelatie vanwege de dispersierelatie (6) voor de transmissielijn b als volgt luidt:

$$k^2 = \frac{1}{\omega^2 LC} \quad (8)$$

zodat k en ω nu *omgekeerd* evenredig met elkaar zijn. Dit leidt tot een min teken tussen de fase- en groepsnelheid vanwege de differentiatie naar k voor het berekenen van de groepsnelheid, (7). De bijbehorende fasesnelheid $\omega^2 LC$ en de groepsnelheid $-\omega^2 LC$ hebben nu een *tegengesteld* teken!! (omdat de groepsnelheid $\frac{\partial\omega}{\partial k} \sim -\omega^{-2}$), ofwel de transmissielijn is “linksdraaiend”.

References

- [1] V.G. Veselago, *The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ* , Soviet Phys. Usp. **10** (1968), 509-513.
- [2] Z. Jakšić, N. Dalarsson and M. Maksimović, *Negative refractive index metamaterials: Principles and applications*, Microwave Review **12** (2006), no. 1, 36-49.
- [3] S. Anantha Ramakrishna, *Negative refractive index metamaterials: Principles and applications*, Rep.Prog. Phys. (2005), 449-521.
- [4] H.Lamb, *On group-velocity*, Proc. London Math. Soc. **1** (1904), 473-479.
- [5] H. Schuster, *An introduction to the theory of optics*, Edward Arnold, London, 1904.
- [6] J.W.S. Rayleigh, Phil.Mag. (1898).
- [7] J.W.S. Rayleigh, *Scientific papers*, vol. 4, p.369.
- [8] N. Garcia and M. Nieto Vesperinas, *Lefthanded materials do not make a perfect lense*, Phys.Rev. Lett. **88** (2002), 207403-1.
- [9] J.B. Pendry, “Comment on: “Left-handed materials do not make a perfect lense”, Phys.Rev. Lett. **91** (2003), 099701.



Figuur 9. Het “linkshandige” electrisch netwerk links heeft “backward waves” en het “rechthandige” netwerk rechts niet.

Appendix: Uitdovende golven

Een vlakke golf met golfvector $\mathbf{k} = k_x, k_y$ en hoekfrequentie ω die propageert in een materiaal met brekingsindex n ziet er als volgt uit:

$$A \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t), \text{ met } k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \quad (9)$$

Indien dus $k_x^2 \geq k_0^2 n^2$ moet k_y zuiver imaginair zijn, ofwel we hebben afhankelijk van het teken van $\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2} n^2 - k_x^2\right)}$ een in de y -richting exponentieel afnemende- of toenemende golf. ♦