

Grondslagen nader

Ongeveer 300 jaar geleden lanceerde Robert Hooke zijn beroemde "Wet van Hooke" en hij zal zich waarschijnlijk niet gerealiseerd hebben welke impact zijn wet zou hebben. We zullen hier niet verder op ingaan daar dit algemeen bekend is, we volstaan met het vermelden van de wet:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F}$$

met Δl is de verlenging van een trekstaaf in mm.

l is de lengte van de staaf in mm.

P is de trekkracht op de staaf in N

E is de elasticiteitsmodulus in $\frac{N}{mm^2}$

F is de doorsnede van de staaf in mm^2

• Flip Doorschot •

Echter, al snel ging men zich afvragen of de staaf ook dunner zou worden tijdens de trekproef en dit leidde tot de zogenaamde constante van Poisson. In het elastische gebied blijkt dat voor veel technische materialen deze constante $\nu=0.3$, en dat betekent dat de staaf inderdaad dunner wordt.

Nu ligt de vraag voor de hand of het volume van de staaf constant blijft. Uit de proeven komt naar voren dat in het elastisch gebied dit niet waar is. Er treedt een kleine volumeverandering op, die bij trek positief en bij druk negatief is. In het plastische gebied is het volume wel constant en dat betekent dat in dit gebied $\nu=\frac{1}{2}$, een belangrijke eigenschap die helaas nogal eens wordt vergeten.

Afschuifproeven en torsieproeven brengen een andere grootte in beeld namelijk de glijdingsmodulus G . Dit blijkt geen onafhankelijke grootte te zijn, er geldt de betrekking.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

De E de G en de ν worden verondersteld constanten te zijn. Verdere studie laat zien dat men nog meer zogenaamde "materiaalconstanten" kan vinden, maar er blijken er telkens maar twee onafhankelijk te zijn. Dus men kan er twee vrij kiezen, de andere zijn hiervan afhankelijk. Vaak kiest men de E en de ν , maar dat is niet noodzakelijk.

Dit alles kan men in de bestaande literatuur nalezen.

Paniek

Bij de ontwikkeling van een nauwkeurig relais (het reed-relais) proberen we heel nauwkeurige bladveren te maken. Bij de berekening maken we gebruik van de E -modulus zoals door de fabrikant van het materiaal opgegeven. Bij meting van de veerconstante van de bladveer

bekeken

klopt er geen fluit van. We vragen de fabrikant naar zijn mening, maar deze geeft aan dat er recht toe recht aan gemeten is. Daarop besluiten we om de E-modulus dan maar zelf in ons eigen laboratorium te gaan meten, maar we vinden dezelfde waarde als de fabrikant. Uiteraard wordt de berekening tig maal gecontroleerd, maar daar ontdekken we geen fout in. Bij de bespreking van de metingen wordt de mogelijkheid geopperd om de E-modulus te meten met een trillingsproef, logitudinaal, transversaal of via torsie. Aangezien we toch niet kunnen kiezen, besluiten we om ze maar alle drie te nemen. We vinden drie verschillende E-moduli, en samen met die uit de trekproef hebben we er nu vier. Deze liggen, schrik niet, 30% uit elkaar. De E-modulus die het gedrag van het reedrelais zou kunnen verklaren ligt daar ergens tussenin. We hebben er dus vijf, wil de ware E-modulus ontstaan? Natuurlijk hebben we gecorrigeerd voor de eindige afmetingen van de trilstaafjes, maar dat levert maar enkele procenten op, geen dertig! Nu worden we echt vals en we besluiten om de E-modulus te meten aan één staafje. Eerst de drie trillingsmetingen die niet-destructief zijn en daarna met de trekproef. We vinden precies dezelfde spreiding.

Er is toen een productie opgezet waarin de fout in E automatisch gecorrigeerd kon worden, ik kan daar helaas niet verder op ingaan.

Hetzelfde fenomeen trof ik ook aan bij het werken met maraging-staal en een echte verklaring is nog niet (door mij) gevonden.

Op zoek naar een verklaring heb ik uiteraard contact gezocht met de collega's van mechanica, het resultaat is ronduit bedroevend. Ze hebben én geen verklaring, én geen belangstelling. "We postuleren gewoon dat E constant moet zijn" is hun reactie, maar helaas kent de natuur hun postulaat niet zoals blijkt.

Alleen al op grond hiervan kan men grote vraagtekens zetten bij de berekeningen die men met de "Eindige elementen"-programma's maakt. We komen hierop nog terug.

Poging tot verklaring

Stel we hebben een brok elastisch materiaal. We hebben gezien dat we het gedrag van een elastisch verschijnsel dan met twee onafhankelijke elastische constanten kun-

nen beschrijven. Stel nu dat we een tweede brok elastisch materiaal hebben. Daarvoor geldt dan uiteraard hetzelfde. Het is echter niet per se nodig dat dit dan dezelfde constanten zijn. Deze zouden per brok en per elastisch verschijnsel kunnen verschillen en daar wijzen de waarnemingen die ik vermeldde op. Graag geef ik deze verklaring op voor een betere, want echt bevredigend is dit alles niet.

Voor de meeste technisch toegepaste materialen blijkt dat ze zich niet zo misdragen als geschetst, maar helaas geldt het niet voor allemaal, dus u bent gewaarschuwd!

Kristallieten

Uit de metaalkunde weten we dat de metalen opgebouwd zijn uit kristallieten, die een eindige afmeting hebben. Bij navraag blijkt dat de meerderheid er geen idee van heeft hoe groot deze dingen zijn. De gemiddelde afmeting van een kristalliet van een commercieel verkrijgbaar materiaal is in de orde van 20 μm . Via warmtebehandelingen en dergelijke kan men wel kleinere krijgen, maar meestal gaat dit ten koste van de bewerkbaarheid dus dat wil men hever niet.

Nemen we nu een stuk plaatmateriaal van 0.1 mm dik (dus 100 μm) dan liggen er nog maar 5 kristallieten gemiddeld op elkaar en dat is niet veel. Dit betekent dat we zeker niet meer mogen spreken over een isotroop en homogeen medium. Toch wordt er maar mondjesmaat aandacht besteed aan dit probleem.

We zullen nu een principeberekening uitvoeren die ons gevoel geeft voor wat het eindig zijn van de kristallieten betekent voor de materiaaleigenschappen.

We nemen een strip met lengte l waar we aan trekken met de kracht P .

Aannamen:

1 Kristallen liggen ofwel met de oriëntatie 100 (ribben) ofwel met de oriëntatie 111 (diagonaal) evenwijdig aan de lengterichting van de strip.

Andere oriëntaties worden niet in beschouwing genomen.

2 E-modulus in de diagonaalrichting van het kristal = E_{11}
E-modulus in de ribbenrichting van het kristal = E_{22}
 $E_{11} > E_{22}$

- 3 De in 1 beschreven oriëntaties komen met gelijke kans = $\frac{1}{2}$ voor, onafhankelijk van de oriëntaties van de omliggende kristallieten.
- 4 Alle kristallieten hebben een kubusvorm met dezelfde afmetingen $\delta \times \delta \times \delta$
 De totale strip bestaat uit N kristallieten met M kristallieten in de breedterichting K kristallieten in de hoogterichting en L kristallieten in de lengterichting.
 $L \cdot \delta = l$ (NB: hier staat de letter l, niet het cijfer 1)
- 5 De kristalgrenzen brengen geen schuifspanning over. Deze aanname zal een veilige schatting geven van de spreiding in de gemeten E-modulus van de strip.

Oriëntatie verdeling

De kans dat in de strip met \underline{N} kristallen, \underline{k} kristallen met de diagonaal evenwijdig met de lengterichting van de strip georiënteerd zijn en \underline{m} kristallieten met de ribben evenwijdig aan de lengterichting van de strip georiënteerd zijn, is gegeven door de binomiale verdeling.

$$P(k, m) = \frac{N!}{k! \cdot m!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

Hieruit kunnen we afleiden:

Voor de gemiddelden μ :

$$\mu_k = \frac{N}{2} \quad \text{en} \quad \mu_m = \frac{N}{2}$$

En voor de variaties:

$$\sigma_k^2 = \frac{N}{4} \quad \text{en} \quad \sigma_m^2 = \frac{N}{4}$$

We nemen nu een strip met **een** kristalliet in de doorsnede dus: $M=K=1$ en $L=N$

Indien we nu consequent de wet van Hooke toepassen op zowel de hele strip als op georiënteerde kristallieten en tevens gebruikmaken van de bovenstaande gemiddelden en spreidingen, kunnen we het volgende vinden voor de flexibiliteit $F = \frac{1}{E}$

Voor het gemiddelde

$$\mu_F = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} \right)$$

en voor de spreiding

$$\sigma_F = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{N}} \cdot \left(\frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{E_{11}} \right)$$

Brengen we in de doorsnede niet **een** kristalliet, maar $\underline{M} \times \underline{K}$, dan vinden we.

$$\text{voor het gemiddelde} \quad \mu_F = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} \right)$$

$$\text{en voor de spreiding} \quad \sigma_F = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{N}} \cdot \left(\frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{E_{11}} \right)$$

met $N = L \times K \times M$

Aangezien $F = \frac{1}{E}$ kunnen we hieruit afleiden.

$$\frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{\mu_F + 3 \cdot \sigma_F}{\mu_F - 3 \cdot \sigma_F} \quad (99.9\% \text{ zekerheid})$$

Vul deze grootheden in, noem $E_{11} = a \cdot E_{22}$, en we willen

$$\frac{E_{\max}}{E_{\min}} = p$$

We vinden dan:

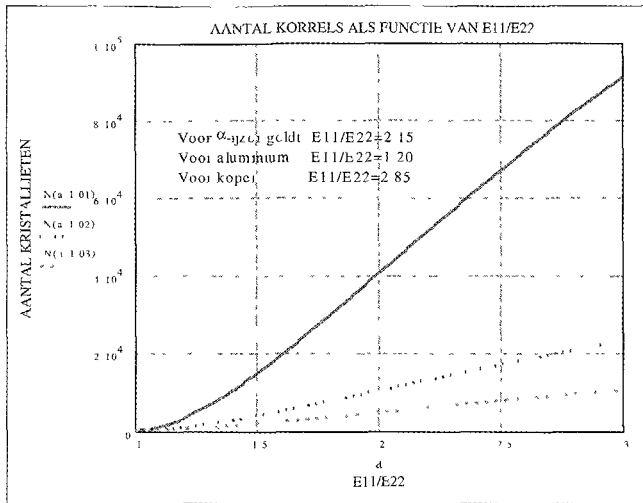
$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} \right) + \frac{3}{2 \cdot \sqrt{N}} \cdot \left(\frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{E_{11}} \right)}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} \right) - \frac{3}{2 \cdot \sqrt{N}} \cdot \left(\frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{E_{11}} \right)} = p$$

Hetgeen leidt tot:

$$N(a, p) := 9 \cdot \frac{(a - 1 + p \cdot a - p)^2}{(-1 - a + p + p \cdot a)^2}$$

$N(a, 1.01)$ betekent dat de spreiding in de E-modulus 1% is.

Uiteraard kan men op deze berekening heel wat afdingen, het is ook best mogelijk om hem uit te breiden maar dan ontstaan formules die veel ingewikkelder zijn en nauwelijks meer inzicht geven. Daarom laten we het hierbij. Wel is het nodig om nog even naar de gevonden resul-



taten te kijken. De formule kan namelijk niet voor alle N 's gelden. Als N klein wordt, kan de gemeten E -modulus groter worden dan E_{11} of kleiner dan E_{22} . Dat kan natuurlijk niet. Werken we dit uit dan vinden we:

$$\text{Bij } E_{\min}=E_{22} \quad N_1 = 9 \cdot \frac{(a-1)^2}{a^2}$$

$$\text{En bij } E_{\max}=E_{11} \quad N_2 = 9 \cdot (a-1)^2$$

$$N_2 > N_1 \quad \text{Voor } a=3 \text{ geldt } N_2=36.$$

Dus een veilig getal is minstens 36 kristallieten in het materiaal.

Keren we nu terug naar de grafiek. Stel we hebben een materiaal waarvoor geldt dat $a=2$. We willen een materiaal met een E -modulus die niet meer dan 2% spreiding vertoont. Uit de grafiek lezen we dan af dat $N=10^4$ kristallieten (middelste stippellijn).

Stel de kristallieten zijn gemiddeld $20 \mu\text{m}$ groot.

De kubus met 10^4 kristallieten is dan groot

$$0.02 \cdot \sqrt[3]{10000} = 0.43 \text{ mm}$$

Nemen we een strip van 0.1 mm dik en 0.5 mm breed, dan zitten in de doorsnede $\frac{0.1 \cdot 0.5}{0.02 \cdot 0.02} = 125$ kristallieten. Voor de lengte zijn er dan nog over $10000/125=80$, dus het plaatje is dan $80 \times 0.02 = 1.6 \text{ mm}$ lang.

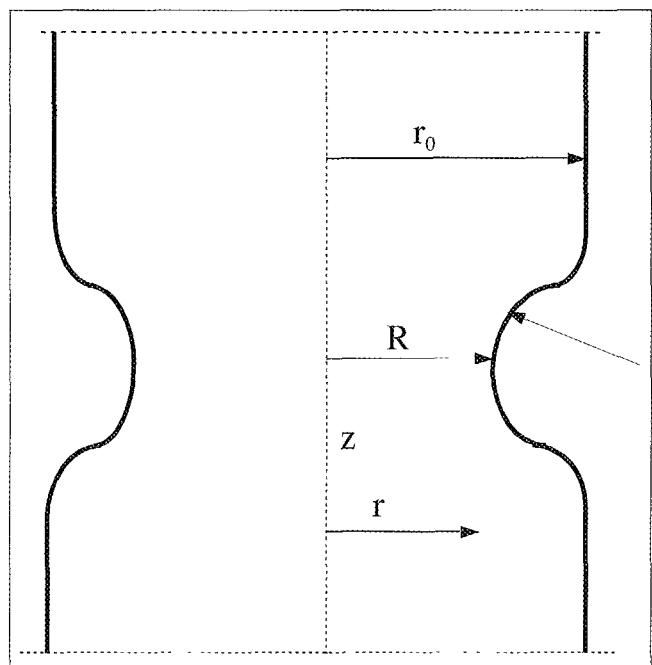
We zien dat dit toch reeds afmetingen zijn die in de miniaturisatie normaal worden toegepast.

Nogmaals merk ik op dat er heel veel op de berekening valt af te dingen, maar ingewikkelder berekeningen laten eenzelfde orde van grootte zien. Dus we laten het hierbij. Wel kijken we nog even naar de grootte van een kristalliet. Hoe weten we die eigenlijk? Stel, we pakken een zak knickers die allen even groot zijn, en die goed zijn opgesloten. We schieten een kogel door de zak zodat er een mooi rond gat ontstaat, de knickers worden op willekeurige hoogten doorsneden. Kijken we in dat gat dan zien we rondjes, met allemaal een verschillende diameter. Vullen we de zak nu met knickers met verschillende diameters en schieten we weer een mooi rond gat dan zal ongeveer hetzelfde beeld ontstaan, rondjes met allemaal een verschillende diameter.

Het zal niet meevallen, als we alleen de beelden in het gat kennen, om daaruit af te leiden of de zak knickers met dezelfde diameter heeft, of dat ze allen verschillend zijn. Maar dat is wel precies het probleem als we via de doorsnede van een preparaat de kristallietgrootte bepalen!

De trekproef

In figuur 1 is schematisch een ingesnoerde trekstaaf weergegeven. In de inleiding hebben we een paar wetens-



Figuur 1

waardigheden van de trekproef aangehaald, en we hebben in het vervolg gezien dat het allemaal toch niet zo triviaal is als men ons wil doen geloven. Over de trekproef is enorm veel gepubliceerd en je kan je afvragen of er nog wel nieuwe feiten gevonden kunnen worden. We zullen zien.

Meestal weet men het meest over het elastische gebied, daar zullen we dan ook niet te lang bij blijven stilstaan. Iets wat wel merkwaardig is, is het feit dat men trekproeven doet aan genormaliseerde trekstaven. Dat is vreemd, omdat men uit deze proeven materiaalconstanten wil afleiden. Maar het is niet waarschijnlijk dat materiaalconstanten zich iets zullen aantrekken van een normalisatie, dat is niet voor de hand liggend!

Een probleem waarmee men geconfronteerd wordt is dat het vaak helemaal niet mogelijk is om een genormaliseerde trekstaaf te maken. Men doet dan proeven aan plaatmateriaal of aan heel dunne draad (in de volksmond apehaar genoemd). Hoe de materiaalgrootheden, aldus bepaald, samenhangen met de gegevens uit de genormaliseerde trekproeven, is vaak een bron van misverstanden. Met name Nadaï, Veenstra en Kals hebben veel en goed werk verzet om hier duidelijkheid over te geven. Echter, veel is nog onduidelijk. Wat we nodig hebben zijn omrekenfactoren waarmee we de gemeten grootheden aan dunne draad, plaatmateriaal en genormaliseerde trekstaven met elkaar kunnen vergelijken.

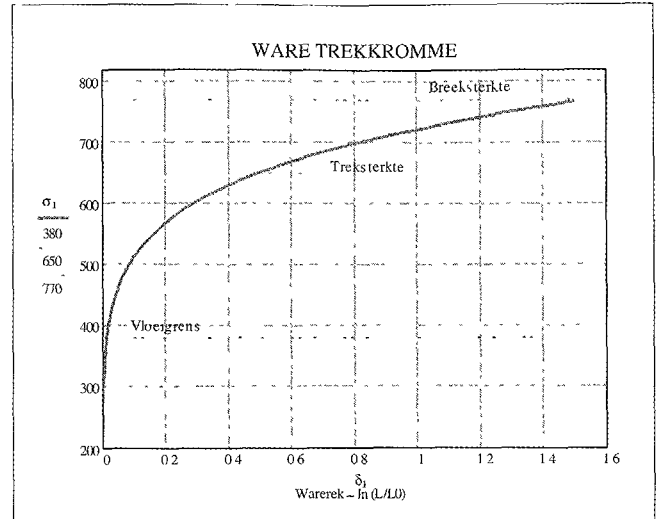
Er zijn dan twee mogelijkheden: óf deze grootheden bestaan en dus passen we ze toe, óf ze bestaan niet en dan hebben we vele jaren voor nop genormaliseerde trekstaven gemaakt. In de toekomst zullen we proberen of hier meer zicht op te krijgen is.

In de navolgende grafiek hebben we nogmaals de trekrekcurve weergegeven, in dit geval de ware. Dus de spanningen zijn gevonden door de kracht te delen door de momentane doorsnede en voor de rek is gebruikgemaakt van de ware rek die is gedefinieerd als

$$\delta = \ln \frac{L}{L_0}$$

Hierbij maak ik gebruik van de symbolen zoals gebruikt door prof. Veenstra in zijn collegedictaat (Technische Plasticiteitsleer collegeno.4743).

Zonder hier verder op in te gaan, vermeld ik nog een aantal resultaten zoals die worden toegepast in de plasti-



citeitsmechanica. Hiervoor wordt u verwezen naar bestaande literatuur op dit gebied.

In het plastisch gebied gebruikt men de relatie $\sigma = C \cdot \delta^n$ als er geen voorversteving is opgetreden en van $\sigma = C \cdot (\delta_0 + \delta)^n$ als er wel voorversteving is opgetreden. Deze relatie wordt toegeschreven aan Nadaï.

Het is een probleem om de vloeispanning goed te meten. Daarom kan men beter uitgaan van de modelvloeispanning die gegeven is door:

$$\sigma_v = \left(\frac{C}{E^n} \right) \frac{1}{1-n}$$

Bij de treksterkte geldt $\delta = n$ $0 < n < 0.6$

Voor de treksterkte kan men vinden.

$$\sigma_B = C \cdot \left(\frac{n}{e} \right)^n \quad e = 2.718$$

De laatste formules gelden als $\delta_0 = 0$.

Dit en nog veel meer kan men vinden in het bovenbedoelde dictaat, maar ook op nog veel meer plaatsen, bijvoorbeeld in dictaten van prof. Kals. Deze formules gelden allemaal als het materiaal vloeit.

De conditie waaronder het materiaal vloeit, is gegeven door de beroemde vloeivoorwaarde van Von Mises. Hier

wordt hij gegeven in cilindercoördinaten:

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6 \cdot t_{r\theta}^2 + 6 \cdot t_{\theta z}^2 + 6 \cdot t_{rz}^2 = 6 \cdot k^2$$

We komen nu terug op de eindige elementenmethoden (EEM). De meest ultieme test voor de juistheid van een programma is de volgende:

We programmeren in een programma dat plasticiteit aan kan een proefstaaf met de elementenverdeling erbij. We geven het materiaal het materiaalgedrag dat we gemeten hebben in een trekproef en vragen aan het systeem om de trek-rek-kromme uit te rekenen. Dat is natuurlijk gemeen, want we weten al wat eruit moet komen, namelijk dezelfde kromme die we erin gestopt hebben. Maar helaas komt dat er niet uit. Het programma komt namelijk niet op het idee dat er insnoering moet optreden. Natuurlijk kunnen we dat wel bereiken door van buitenaf in te grijpen, maar dat heeft dan niks meer met fysisch gedrag te maken. Vele berekeningen hebben laten zien dat men er wel dichtbij kan komen, maar een één op één correspondentie heb ik helaas nog niet gezien. Maar even helaas is het zo, dat het punt van insnoering het einde van het betrouwbare bewerkingsgebied bepaalt, en als we dat niet goed voorspellen hebben we aan de hele berekening niets meer, of in ieder geval heel weinig. Persoonlijk heb ik er productietechnisch nooit iets mee kunnen doen. Het dichtst bij is gekomen dr. Hans van Wijngaarden die samen met Hans Galenkamp een vernuftig experiment heeft opgezet. Het proefschrift van Van Wijngaarden is het lezen nog steeds meer dan waard!

Insnoeren en Bridgman

Bij de trekproef nemen we waar dat het materiaal insnoert en in dit insnoeringsgebied treedt de grootte rek op Bridgman heeft hier in het verleden uitgebreid onderzoek naar gedaan, zowel praktisch als theoretisch. Zijn berekeningen verdienen groot respect en hebben in ieder geval het meetgebied enorm uitgebreid.

Deze berekeningen zijn door Veenstra/Kals intensief gecontroleerd en zijn in de bestaande literatuur eenvoudig terug te vinden. We volstaan met het geven van de resultaten (zie voorgaande figuur 1).

Voor de spanningstoestand in de kleinste doorsnede vindt Bridgman

$$\sigma_r = \sigma_\theta = k \sqrt{3} \cdot \ln \frac{R^2 + 2 \cdot R \cdot \rho - r^2}{2 \cdot R \cdot \rho}$$

$$\sigma_z = k \cdot \sqrt{3} \cdot \left(1 + \ln \frac{R^2 + 2 \cdot R \cdot \rho - r^2}{2 \cdot R \cdot \rho} \right)$$

Door σ_z te integreren over het oppervlak kan men de trekkracht P vinden:

$$P = \pi \cdot k \sqrt{3} \cdot R^2 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \rho}{R} \right) \cdot \ln \left(1 + \frac{R}{2 \cdot \rho} \right)$$

Noem nu $\frac{P}{\pi \cdot R^2} = \sigma_{zgem}$

Noem $k \cdot \sqrt{3} = C_B \cdot \sigma_{zgem}$ en we vinden de beroemde correctiefactor van Bridgman:

$$C_B = \frac{1}{\left(1 + \frac{2 \cdot \rho}{R} \right) \cdot \ln \left(1 + \frac{R}{2 \cdot \rho} \right)}$$

Uit de volume-invariantie kunnen we tot slot nog vinden

$$\bar{\delta} = 2 \cdot \ln \frac{r_0}{R}$$

voor de effectieve deformatie in de kleinste doorsnede:

We gaan nu iets anders doen. In feite ligt het meer voor de hand om bij zo'n trekstaaf cilindercoördinaten te kiezen (r, θ, z) .

Van de spanningen weten we in de kleinste doorsnede al heel veel

De spanningen hangen niet af van θ (rotatorisch symmetrisch).

$\theta_r = \theta_\theta$ $\tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0$ alleen τ_{rz} blijft van de schuifspanningen over. We noemen hem verder τ . $\tau = \tau(r, z)$

$$\tau(0,0) = 0 \quad \tau(R,0) = 0 \quad \sigma_r(R,0) = 0$$

We gaan naar de evenwichtsvergelijkingen kijken:

Samen met $\sigma_r = \sigma_\theta$ gaan de evenwichtsvergelijkingen over in:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \quad (1) \quad \text{en}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

De voorwaarde van Von Mises wordt in dat geval:

$(\sigma_z - \sigma_r) = (3k^2 - 3\tau^2)^{\frac{1}{2}}$ in de kleinste doorsnede is $\tau=0$ en dus

$$\sigma_z - \sigma_r = k\sqrt{3} \quad (3)$$

Differentieer nu (1) naar z en (2) naar r en trek de twee uitkomsten van elkaar af. Substitueer hierin (3) en we vinden:

$$-\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tau}{r} \right) = 0$$

Substitueer nu $\tau = f(r) \cdot g(z)$

Er ontstaan dan twee gewone differentiaalvergelijkingen die beide oplosbaar zijn. We vinden:

$$g'' + a^2 g = 0 \quad \text{en}$$

$$r^2 f'' + r f' - (1 - a^2 r^2) f = 0 \quad \text{Besselvergelijking}$$

a is de constante die door de separatie is ingevoerd. Deze mag geen functie zijn van r en van z , wel van bijvoorbeeld R of r_0 of iets dergelijks.

Werken we deze vergelijkingen uit en houden we rekening met de randvoorwaarden, dan vinden we ten slotte voor τ :

$$\tau(r, z) = C \cdot \sin(az) \cdot J_1(ar)$$

J_1 is de Besselfunctie van de eerste soort en van de orde 1. Uiteraard zijn er twee oplossingen van de differentiaalvergelijking, echter de tweede valt weg omdat hij voor $r=0$ oneindig wordt.

Door deze τ te substitueren in (1) en (2) vinden we σ_r en σ_z . Dit is nu rekenwerk geworden en samen met de randvoorwaarden levert dit ten slotte

$$C = \frac{k\sqrt{3}}{J_0(aR)}$$

$$\tau = \frac{k\sqrt{3}}{J_0(aR)} \cdot \sin(a \cdot z) \cdot J_1(a \cdot r)$$

$$\sigma_z = \frac{k\sqrt{3}}{J_0(aR)} \cdot \cos(a \cdot z) \cdot J_0(a \cdot r)$$

$$\sigma_r = \frac{k\sqrt{3}}{J_0(aR)} \cdot \cos(a \cdot z) \cdot J_0(a \cdot r) - k\sqrt{3}$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta$$

Door σ_z te integreren over de kleinste doorsnede vinden we de trekkracht P :

$$P = 2\pi \frac{k\sqrt{3}}{J_0(aR)} \cdot \frac{R}{a} \cdot J_1(aR)$$

Noem nu $aR = b$. Hierin is b een zuiver getal,

En noem in de formules van Bridgman $\frac{R}{2 \cdot \rho} = \alpha$

Gelijkstelling van de aldus behandelde formules van Bridgman voor P en σ_z met de formules voor P en σ_z zojuist gevonden, levert twee vergelijkingen met twee onbekenden op, namelijk:

$$\frac{1}{J_0(b)} = 1 + \ln(\alpha + 1) \quad (4) \quad \text{Uit gelijkstelling } \sigma_r \text{ met } r=0 \text{ en}$$

$$\frac{2}{b} \cdot \frac{J_1(b)}{J_0(b)} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \ln(1 + \alpha) \quad (5) \quad \text{Uit gelijkstelling van } P$$

Los uit (4) de α op en substitueer die in (5). Men vindt dan een vergelijking waarin alleen nog de b voorkomt. Deze kan men niet expliciet oplossen maar moet men numeriek benaderen.

De formule ziet er als volgt uit (zie volgende bladzijde, de bovenste formule):

Ik kan het ook niet helpen!

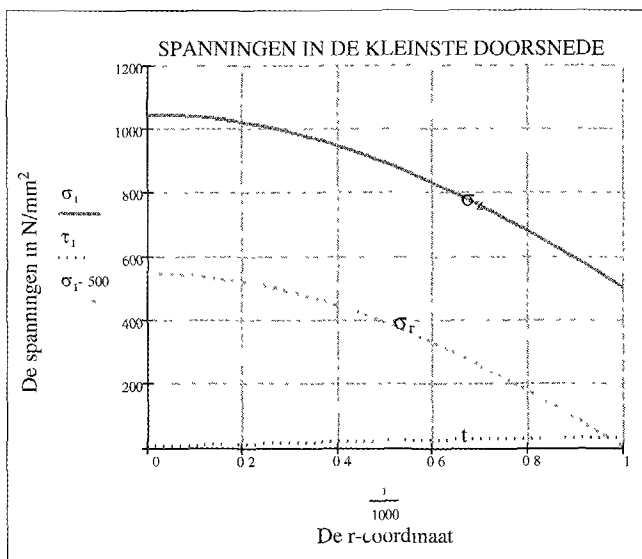
Als oplossing vindt men voor deze draak: $b=1.556$

Uiteraard kennen we nu ook α $\alpha=1.95$

Wat we gevonden hebben is de mogelijkheid om het meten van de ρ over te slaan. **Dus we hoeven alleen nog maar de kleinste doorsnede te meten.**

$$\left[\frac{2}{b} \cdot \frac{J1(b)}{J0(b)} - \left[1 + \frac{1}{\exp \left[\frac{(1 - J0(b))}{J0(b)} \right] - 1} \right] \right] \cdot \ln \left[\exp \left[\frac{(1 - J0(b))}{J0(b)} \right] \right] = 0$$

We geven nog een beeld van het spanningsverloop in de kleinste doorsnede.



Gevolgen

1. Op pagina 19 vinden we voor de ware rek: $\delta = \ln \frac{L}{L_0}$ en op pagina 20 vinden dat bij de

treksterkte geldt.

$$\delta = n$$

Hieruit kunnen we afleiden: $\frac{L}{L_0} = e^n$

Uit het constant zijn van het volume (maar het kan ook uit andere plastische formules) vinden we:

$$r_0 = R_1 \cdot e^{-\frac{n}{2}} \quad \text{Met } 2R_1 \text{ is de oorspronkelijke doorsnede van de trekstaaf.}$$

Na het insnoeren loopt de trekkracht terug en het gebied buiten de insnoering komt weer in het elastische gebied.

2. Uit de intermitterende trekproef bepalen we de momentane trekkracht en de daarbij behorende minimale diameter dus: P en $R (=D_{\min}/2)$.

We berekenen met:

$$P = 2\pi \frac{k\sqrt{3}}{J0(a \cdot R)} \cdot \frac{R}{a} \cdot J1(a \cdot R)$$

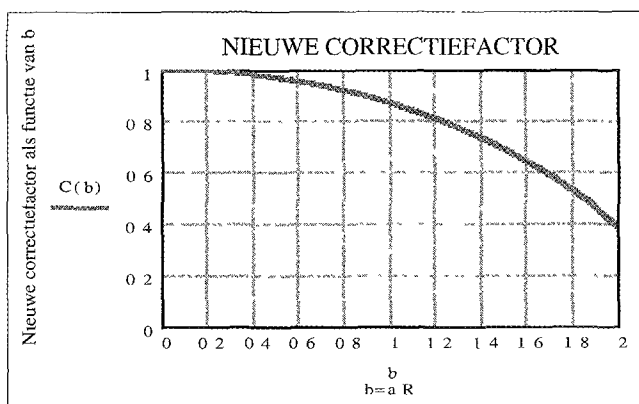
en $a \cdot R = b$

de waarde **b**.

Uit $a \cdot R$ bepalen we dan een nieuwe correctiefactor C . Dit doen we op dezelfde wijze als Bridgman dat heeft gedaan (zie pagina 19), en we vinden:

$$C := \frac{b \cdot J0(b)}{2 \cdot J1(b)}$$

We vinden dan de volgende grafiek:

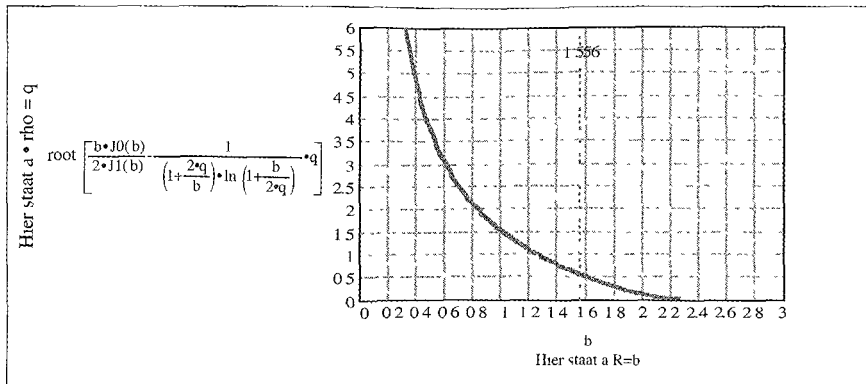


Als we deze grafiek vergelijken met de grafiek van Bridgman dan zien we een afwijkende vorm. Bedenk echter dat de x-as van de grafiek van Bridgman een andere schaal heeft.

We zien dus dat we de meting van ρ niet meer nodig hebben!

3. Het is nu voor de hand liggend om de gegevens van Bridgman te koppelen met de nieuwe gegevens. Dat kan op een aantal manieren die overigens tot hetzelfde resultaat leiden.

We realiseren ons dat de C op precies dezelfde manier



bepaald wordt als de C_B van Bridgman en dus zijn deze twee C 's aan elkaar gelijk. Dit geeft ons de mogelijkheid om een verband te leggen tussen R en ρ . Uit $C=C_B$ vinden we:

$$\frac{b \cdot J_0(b)}{2 \cdot J_1(b)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{2 \cdot r}{R}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{R}{2 \cdot r}\right)}$$

Hiervoor kunnen we schrijven

$$\frac{b \cdot J_0(b)}{2 \cdot J_1(b)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2 \cdot a \cdot r}{a \cdot R}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{a \cdot R}{2 \cdot a \cdot r}\right)}$$

Noem $a \cdot R=b$ en $a \cdot \rho=q$ en we vinden:

$$\frac{b \cdot J_0(b)}{2 \cdot J_1(b)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{2 \cdot q}{b}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{b}{2 \cdot q}\right)}$$

We zien dus een verband tussen q en b . Helaas is het niet mogelijk om q expliciet uit te drukken in b of omgekeerd. Daarom doen we het numeriek via een grafiek (bovenaan pagina 22).

De verticale as ziet er wat griezelig uit, maar het betekent alleen maar dat de functie die hier staat de wortel q bepaalt bij een gekozen b . Kijken we naar het quotiënt:

$$\frac{q}{b} = \frac{a \cdot \rho}{a \cdot R} = \frac{\rho}{R} \quad \text{dan zien we precies de parameter waarmee Bridgman werkt.}$$

Het is duidelijk dat we nog meer wetenswaardigheden kunnen afleiden uit het gevonden verband. Confrontatie met de praktijkproeven is echter veel vruchtbaarder. Een aantal toevallige gegevens die nog beschikbaar waren laten zien dat het prima werkt,

maar de echte confrontatie met de praktijk laat ik, noodgedwongen, over aan de echte specialisten.

Conclusies

E is soms niet constant.

Het omklappen van v van 0.3 naar 0.5 zal niet momentaan gebeuren. Er zal een overgangsgebied zijn waarvan verder niets bekend is.

Het meten van de radius ρ van de insnoering kan achterwege blijven.

Het is kennelijk mogelijk om naast de correctiefactor van Bridgman een andere te vinden. Dit kan een nieuw licht doen schijnen op het insnoeringsgebied.

Wellicht is het mogelijk om het technisch bruikbare plastische gebied iets uit te breiden. Dit valt af te leiden van de voorlaatste grafiek. We zien dat vanaf $b=0$ de lijn een tijd horizontaal blijft tot $b \approx 0.3$.

De waarde van $b=1.556$ zegt alleen iets over de vergelijking die we gemaakt hebben met de formules van Bridgman, maar heeft geen fundamentele betekenis.