

Stootgedrag

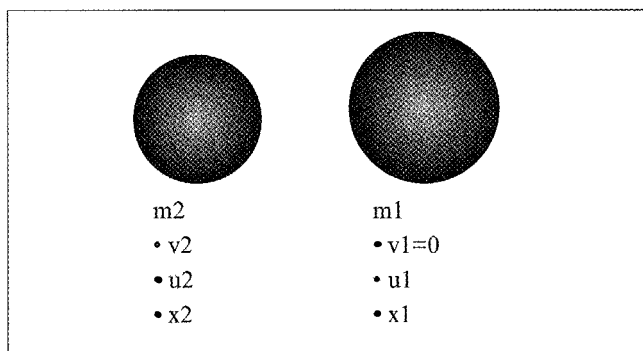
nader bekeken

Vervolg op een in 1999 gepubliceerd artikel van de hand van dezelfde auteur in *Mikroniek*, jaargang 40, nummer 1 (pagina 13).

• Flip Doorschot •

Botsende bollen

We gaan bollen en staven laten botsen, we beginnen met bollen.



m2 heeft een snelheid v_2 en met deze snelheid botst hij tegen m1 die stilstaat.

Uit de wetten van Newton vinden we:

$$\text{impuls: } m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

energie:

Hieruit kunnen we afleiden:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$u_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

Met $v_1=0$ vinden we dan:

$$u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad (3) \quad \text{en} \quad u_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad (4)$$

Nu gaan we wat anders doen, namelijk we plaatsen tussen de bollen een massaloze veer (k) en een massaloze demper (ρ).

Door nu $k=ma$ (overigens ook van Newton) toe te passen vinden we voor het systeem, precies zo als in de dynamica bij trillende massa's:

$$m_1 \ddot{x}_1 - \rho (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k(x_2 - x_1) = 0 \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + \rho (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = 0 \quad (2)$$

Als randvoorwaarden voeren we in:

in het punt waar de twee bollen tegen elkaar botsen noemen we:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad t = 0 \quad (\text{t is de tijd})$$

En verder:

$$\dot{x}_1(0) = a; \quad \dot{x}_2(0) = b$$

Deze vergelijkingen zien eruit als de trillingvergelijkingen, maar ze betekenen iets anders. Ze beschrijven namelijk het gedrag van de bollen tijdens, en direct na de stoot.

Noem: $\frac{k}{m} = \omega_1^2$ maak $\rho=0$ en maak $m_1=m_2=m$
 De differentiaalvergelijkingen zijn nu eenvoudig oplosbaar en we vinden:

$$x_1(t) = \frac{1}{4} \frac{2ta\omega_1 + 2tb\omega_1 - b \sin(\sqrt{2}\omega_1 t)\sqrt{2} + a \sin(\sqrt{2}\omega_1 t)\sqrt{2}}{\omega_1}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{4} \frac{2ta\omega_1 + 2tb\omega_1 + b \sin(\sqrt{2}\omega_1 t)\sqrt{2} + a \sin(\sqrt{2}\omega_1 t)\sqrt{2}}{\omega_1}$$

We bepalen $x_2(t)-x_1(t)$. Zolang als dit verschil positief is, duurt de botsing voort. We noemen het verschil alpha (α). We vinden:

$$\alpha = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\sqrt{2}\omega_1 t)\sqrt{2}(-b+a)}{\omega_1}$$

We bepalen de eerste afgeleide van α en noemen deze r . Door deze nul te stellen kunnen we de maximale indrukking van de veer bepalen. Door hem te vermenigvuldigen met de veerconstante k kennen we dan de maximale botskracht. We vinden:

$$r = -\cos(\sqrt{2}\omega_1 t)(-b+a)$$

Voor $t=0$ zien we dat de botsing start met de waarde $\alpha=0$, zoals het hoort.

Als α weer 0 wordt is de botsing afgelopen. Op dat moment geldt:

$$\sqrt{2}\omega_1 t = \pi$$

En hieruit volgt de stoottijd t_{stoot}

$$t_{\text{stoot}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_1}$$

We zien dat α maximaal is als $\sqrt{2}\omega_1 t = \frac{\pi}{2}$ en simultaan geldt dan dat de $r=0$. Het is verstandig om beiden te controleren!

We vinden zo voor de maximale indrukking:

$$\alpha_{\text{max}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{(-b+a)}{\omega_1}$$

Maken we $b=v_2$ en $a=0$ dan wordt dit:

$$\alpha_{\text{max}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_2}{\omega_1}$$

Vermenigvuldigen we dit met k dan vinden we de maximale botskracht.

$$k_{\text{stoot}} = k \cdot \alpha_{\text{max}}$$

De grote vraag is nu of dit alles mag!

Daartoe rekenen we de snelheden u_1 en u_2 uit aan het eind van de stoot en we vinden:

$$u_1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b \cos(\pi) + \frac{1}{2}a \cos(\pi)$$

$$u_2 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b \cos(\pi) - \frac{1}{2}a \cos(\pi)$$

Met $b=v_2$ en $a=0$ wordt dit:

$$u_1=v_2 \quad \text{en} \quad u_2=0$$

Met $m_1=m_2=m$ leveren de formules (3) en (4) hetzelfde resultaat, dus het mag!

We hebben dit met verschillende configuraties getest en het geldt altijd. Als we de massa's niet gelijk maken, en we maken ρ niet gelijk aan 0, dan worden de berekeningen wel gecompliceerder, maar ze geven geen verdere moeilijkheden.

Botsen van staven

We laten nu twee staven met diameter d en lengte l met elkaar botsen onder dezelfde randvoorwaarden als hierboven bij de bollen ($v_2=v_2; v_1=0$). Aan wat we hierboven berekend hebben verandert dan niets.

Wat nog niet bevredigend is, is het sprookje van de massaloze veer (en ook straks de massaloze demper).

Echter de staafjes hebben een eigen stijfheid die we eenvoudig uit kunnen rekenen. We vinden dan:

$k = \frac{E \cdot F}{l}$ en deze gebruiken we voor k
 E =Elasticiteitsmodulus; F =Doorsnede = $\frac{\pi}{4} \cdot d^2$; l =lengte staafje.

We vinden dan voor $\frac{E \cdot F}{m \cdot l}$ (zie voren) m =massa staafje
 We weten dat de verplaatsingssnelheid van een drukgolf in een medium gelijk is aan: $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$;

E = elasticiteitsmodulus; ρ =soortelijke massa. (We komen erop terug.)

We kunnen nu nog twee belangrijke grootheden berekenen,

1. De maximale mechanische spanning die tijdens de stoot optreedt:

$$\sigma_{\max} = \frac{K_{\text{stoot}}}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} \quad \text{vul in:}$$

$$K_{\text{stoot}} = k \cdot \alpha_{\max}; \quad \alpha_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_2}{\omega l}; \quad \omega l^2 = \frac{E \cdot F}{m \cdot I}; \quad k = \frac{E \cdot F}{I}; \quad \text{en} \\ m = \rho \cdot F \cdot l$$

$$\text{Hiermee vinden we voor } \alpha_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot v_2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \rho}{m \cdot I}} \quad (5)$$

2. De afstand die de drukgolf aflegt gedurende de stoot

$$l_g = v \cdot t_{\text{stoot}} \quad \text{vul in:}$$

$$t_{\text{stoot}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\pi \cdot I}{\omega l}; \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \omega l^2 = \frac{E \cdot F}{m \cdot I};$$

Hiermee vinden we voor:

$$l_g = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi \cdot I$$

Deze laatste formule is behoorlijk verrassend. Hier blijkt namelijk dat l_g alleen afhangt van de lengte l van een staafje.

We gaan nu wat numerieke gegevens invoeren om een gevoel te krijgen voor wat dit nu allemaal betekent.

$$L=30 \text{ mm}; d=10 \text{ mm}; \rho=7.8 \cdot 10^{-10} \text{ kg/mm}^3,$$

$$E=2.1 \cdot 10^4 \text{ kgf/mm}^2; v_2=10 \text{ m/sec}$$

en we vinden:

$$m=1.84 \cdot 10^{-3} \text{ kg}; t_{\text{stoot}}=0.013 \cdot 10^{-3} \text{ sec}; v=5190 \text{ m/sec};$$

$$k=54978 \text{ kgf/mm}; \alpha_{\max}=0.041 \text{ mm}; \sigma_{\max}=28.70$$

$$\text{kgf/mm}^2; \omega l=172856 \text{ 1/sec}; K_{\text{stoot}}=2254 \text{ kgf};$$

$$l_g=67.5 \text{ mm}$$

We zien dat de maximale botskracht erg hoog wordt!

Nadere beschouwing van het resultaat laat zien dat de factor $\frac{\sqrt{2}}{2}$ afhangt van het gekozen botsprobleem (in dit geval $v_2=v_2; v_1=0; m_1=m_2=m$).

Laten we bijvoorbeeld een staaf botsen tegen een starre muur, dan vindt men voor $l_g=\pi \cdot l$ en is de factor =1.

Andere botsproblemen zijn eenvoudig met de formules op te lossen.

Ik herhaal nu heel in het kort een deel van het artikelje in Mikroniek, jaargang 40, nummer 1 (pag.13)

John Prescott

In verschillende publicaties kan men lezen over lopende golven, de mooiste (vind ik!) is te vinden in het boek "Applied Elasticity" van John Prescott, een Dover Publication.

Na het botsen (met een snelheid v_2) tegen bijvoorbeeld een staaf, loopt er een verplaatsingsgolf door het materiaal.

Deze golf loopt met een snelheid $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

(Men noemt dat wel de snelheid van het geluid in het gekozen materiaal).

E =elasticiteitsmodulus in kgf/mm^2

ρ =soortelijke massa kg/mm^3

Kijk bij het gebruik van deze formule uit met de dimensies. Voor staal vindt men zo $v=5190 \text{ m/sec}$.

Voor de druk vindt hij:

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2} E \quad (\text{kgf/mm}^2)$$

Nemen we $v_2=10 \text{ m/sec}$, $v=5190 \text{ m/sec}$ en $E=2.1 \cdot 10^4 \text{ kgf/mm}^2$ dan vinden we voor $\sigma=40.5 \text{ kgf/mm}^2$, dat is dus aanzienlijk.

Als deze golf de overkant bereikt, wordt hij gereflecteerd. Als hij reflecteert op een vrij oppervlak dan loopt hij terug zonder het teken om te keren. Een drukgolf blijft dus een drukgolf en een trekking blijft een trekking. Is het oppervlak echter niet vrij dan keert de golf terug met het omgekeerde teken; druk wordt dus trek en trek wordt druk.

We zien dat de snelheid van zo'n golf behoorlijk hoog is. Afhankelijk van de botsduur is zo'n golf in staat om gedurende de botsing het materiaal een aantal malen te doorlopen.

Kijken we nog eens heel even naar de formule voor

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2} E \quad \text{vul in } v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

en we vinden na een kleine herleiding:

$$\sigma_{\max} = v_2 \cdot \sqrt{E \cdot \rho}$$

Op de factor na is dit hetzelfde als gevonden in formule 5. We zagen dat de factor te maken had met het gekozen botsprobleem. Laten we de staaf tegen een starre muur botsen dan wordt de factor 1. Dit is ook het probleem zoals bekeken door Prescott. Dus ook nu weer blijkt dat

de twee, onderling verschillende methoden, tot hetzelfde resultaat leiden. Dat geeft vertrouwen!

Niet linear

Zoals waarschijnlijk bekend heeft Hertz gerekend aan botsende bollen. Hij past de volgende slimme truc toe:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 - \rho(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k(x_2 - x_1) = 0 \tag{1}$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + \rho(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = 0 \tag{2}$$

Vermenigvuldig (1) met m_2 en (2) met m_1 . Trek daarna de twee gevonden vergelijkingen van elkaar af en men vindt na enige herleiding:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + \rho(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = 0$$

Noem nu $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m$ en $(x_2 - x_1) = x$ en we vinden een keurige trillingsvergelijking:

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = 0 \tag{6}$$

Door hiermee te gaan werken verliezen we de informatie over x_1 en x_2 . Maken we bij het begin van de stoot $x=0$ en $t=0$ dan geeft deze differentiaalvergelijking precies weer wat er gedurende de stoot gebeurt en daar is het nu om begonnen.

Vergeet bij dit alles niet dat m nu een samengestelde functie is. Als $m_1 = m_2 = m$ dan is de m in de trillingsfunctie: $\frac{m}{2}$

Men kan in de berekening van Hertz vinden hoe hij een niet-lineaire veer invoert en doorrekent. Door dit wat algemener in te voeren kunnen we een hele klasse van niet-lineaire veren bestuderen. We hebben gekozen voor de stijfheid $C \cdot X^b$. De ρ stellen we weer nul en voeren dit in in (6):

$$m\ddot{x} + 2 \cdot C \cdot x^b = 0$$

Vermenigvuldig dit met x

$$m\dot{x} \cdot \dot{x} + 2 \cdot C \cdot x^b \cdot \dot{x} = 0$$

Schrijf dit als:

$$m \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right) + 2C \frac{d}{dt} \left(\frac{x^{b+1}}{b+1} \right) = 0$$

Als we deze een maal integreren en we voeren de randvoorwaarde in:

voor $x=0$ geldt $\dot{x}=v_2$

Na enige herleiding volgt hieruit:

$$x^2 = v_2^2 \cdot \frac{4 \cdot C \cdot x^{b+1}}{m \cdot (b+1)} \tag{7}$$

Bij de grootste indrukking van de veer geldt $\dot{x}=0$

Hiermee vinden we.

$$x_{\max} = \frac{m \cdot (b+1) \cdot v_2^2}{4 \cdot C}^{\frac{1}{b+1}}$$

Als $b=2$ kunnen we heel gemakkelijk controleren dat dit hetzelfde is als gevonden voor α_{\max} op pagina 16.

Door separatie van de variabelen kan men uit (7) ook de tijdsduur van de stoot berekenen, en we vinden.

$$t_{\text{stoot}} = \frac{2 \cdot \left[\frac{(b+1) \cdot m \cdot v_2^2}{4 \cdot C} \right]^{\frac{1}{b+1}}}{v_2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{b+1}}}$$

Opmerking: Als $b \leq -1$ worden de waarden van de integraal zuiver imaginair, dus daar hebben we in het reële leven niets aan. Dus $b > -1$.

Uiteraard moet voor $b=1$ het lineaire resultaat terugkomen, en dat klopt!

Uit de berekeningen van Hertz blijkt dat ook hij de veerconstante heeft ingevuld als een machtfunctie. De b bij Hertz is $\frac{3}{2}$, en vergelijking laat zien dat de antwoorden met elkaar kloppen.

Bijna alles met b brengen we nu samen in een factor $y(b)$ en vinden (zie grafiek op volgende pagina).

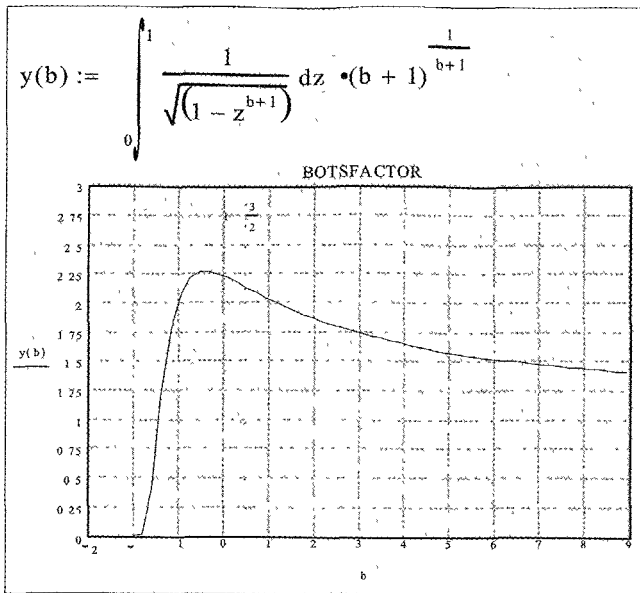
In de grafiek zijn de waarden $b=1$ en $b=\frac{3}{2}$ ingevuld, het zijn geen speciale grootheden. Als $b = \infty$ wordt $y(b)=1$.

Of een negatieve b kan bestaan is een open vraag.

Vertragingen

In het voorgaande hebben we de volgende grootheden gevonden:

t_{stoot} , X_{\max} (of α_{\max}) en de beginsnelheid v_2 . Als we bedenken dat de tijd die nodig is om X_{\max} te bereiken gelijk is aan $t_{\text{stoot}}/2$, kunnen we de vertraging van een



botsend lichaam berekenen, en via de vertraging kunnen we dan met $k=m \cdot a$ de kracht berekenen die bij de vertraging hoort.

De vertraging halen we uit:

$$S = V_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{waaruit volgt:}$$

$$a = \frac{2(V_0 t - S)}{t^2} \quad S = X_{\max} \quad t = t_{\text{stoot}}/2$$

Vullen we hier de gegevens in van het botsen van het staafje tegen een starre muur dan vinden we:

$a \approx 800.000 \text{ m/s}^2$, en dit leidt tot een kracht van **1470 kgf**.

Rekenen we echter de stootkracht uit dan vinden we met $C \cdot X_{\max} = 3175 \text{ kgf}$; dat is dus aanzienlijk hoger.

Overigens is het ook hier de vraag of de vertragingkracht wel wat zegt.

De vertraging kan niet met oneindige snelheid in de staaf worden doorgegeven, vandaar.

Het kan interessant zijn om de kijken naar de verhouding van de stootkracht ten opzichte van de vertragingkracht, dus We vinden dan: $\frac{k_{\text{stoot}}}{k_{\text{vertraging}}}$

Voor een staaf die botst met de snelheid V tegen een zelfde staaf die stilstaat:

$$\frac{k_{\text{stoot}}}{k_{\text{vertraging}}} = \frac{\pi^2}{16 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)} \approx 1.08$$

Voor een staaf die botst met de snelheid V tegen een starre muur:

$$\frac{k_{\text{stoot}}}{k_{\text{vertraging}}} = \frac{\pi^2}{8 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)} \approx 2.16$$

Voor een staaf die botst met een snelheid V tegen een zelfde staaf met snelheid $-V$

$$\frac{k_{\text{stoot}}}{k_{\text{vertraging}}} = \frac{\pi^2}{4 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)} \approx 4.32$$

We zien dat de grootheden wel nog afhangen van het soort botsend systeem, maar niet van het materiaal en de afmetingen van de botsende systemen en dat is natuurlijk mooi. Als we proberen om deze verhoudingen te berekenen voor niet-lineaire systemen of systemen met een demper, ontstaan er zeer gecompliceerde vergelijkingen die geen verder inzicht meer geven. Ze zijn daarom hier maar weggelaten.

Om toch een gevoel te krijgen over de systemen met een demper is het volgende gedaan. We kunnen nagaan welke randvoorwaarden we moeten substitueren in de differentiaalvergelijking van een lineair systeem zonder demper om de u_1 en de u_2 te vinden van een systeem met restitutiecoëfficiënt λ . Als we dit doorwerken vinden we precies dezelfde verhoudingen als voren, hetgeen ook wel in de lijn der verwachtingen ligt, maar het kan mijns inziens niet exact kloppen. Beter hebben we nu niet! Wel is het goed om te bedenken dat door de demping het totale krachtniveau omlaag gaat.

De restitutiecoëfficiënten

Tot nu toe hebben we niet veel aandacht geschonken aan de restitutiecoëfficiënt λ . We zullen daar nu wat nader op ingaan.

In het hoofdstuk over botsende bollen hebben we gebruikgemaakt van een figuur die we nu ook kunnen gebruiken. Het enige dat anders is, is dat er bij de

botsing een restitutiecoëfficiënt optreedt. Deze is als volgt gedefinieerd:

$$u_1 - u_2 = -\lambda(v_1 - v_2)$$

Hiermee vinden we na het toepassen van de botswetten en bovenstaande definitie:

$$u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - \lambda m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = \frac{m_2 v_2 + m_1 v_1 - \lambda m_1 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$$

Met $v_1=0$ en $m_1=m_2$ volgt hieruit.

$$u_1 = \frac{v_2}{2}(1+\lambda)$$

$$u_2 = \frac{v_2}{2}(1-\lambda)$$

Men kan eenvoudig nagaan dat in systemen met een restitutiecoëfficiënt energieverlies optreedt. Dit gebeurt in puur elastische systemen niet, we moeten dit dus vergelijken met systemen met een demper (zie voren).

Iets wat een beetje vreemd overkomt is die viskeuze demping. Met de beste wil van de wereld is er in een mechanisch systeem niets viskeus te ontdekken en dat geldt ook voor de meeste dynamische systemen. Natuurlijk kan men systemen ontwikkelen waarin een viskeuze demper is aangebracht, maar in de meeste mechanismen is dat niet het geval. Toch rekent men met zo'n demper, maar wat betekent dat dan? In feite hebben we in de differentiaalvergelijking alleen maar een uitdrukking nodig met de juiste dimensie en bovendien zien we alleen maar massa's en veren.

Het blijkt dat $\sqrt{k \cdot m}$ precies de goede dimensie heeft. In plaats van α (dampingfactor) voeren we daarom in de differentiaalvergelijking in: $\alpha \sqrt{k \cdot m}$ als dampingfactor.

Toegegeven, we weten ook niet waar we α in het systeem moeten zoeken, maar het lijkt reëler.

De differentiaalvergelijkingen (1) en (2) kan men weer oplossen op de klassieke manier (dat kan natuurlijk ook als men de ρ gewoon laat staan). We zullen niet verder ingaan op de berekening, maar de relevante antwoorden geven. We vinden:

$$u_1 = \frac{1}{2} v_2 (1 + e^{-\alpha \omega t})$$

$$u_2 = \frac{1}{2} v_2 (-1 + e^{-\alpha \omega t})$$

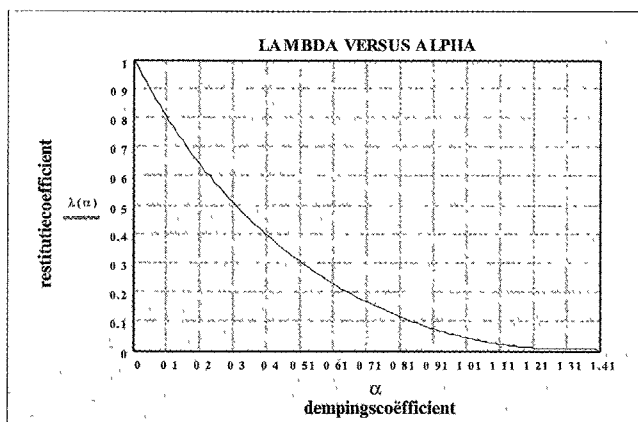
Substitueer deze waarden in $u_1 - u_2 = -\lambda(v_1 - v_2)$ en maak $v_1=0$ en we vinden:

$$\lambda = e^{-\alpha \omega t} \text{ met } t = \frac{\pi}{\omega \sqrt{2-\alpha^2}}$$

Na enige herleiding vindt men hieruit:

$$\lambda = e^{-\frac{\alpha \pi}{\sqrt{2-\alpha^2}}}$$

We brengen dit in een grafiek.



Over het algemeen zijn de dempingfactoren in werktuigbouwkundige constructies maar klein. Echter in hydrostatisch gelagerde machines zijn de lagers gewoon viskeuze dempers, dus hier is de dempingfactor niet klein. Van werktuigkundige constructies kan men via modal analysis het dynamisch gedrag vaststellen door er met een hamertje tegen te tikken. Opnemers die op de machine zijn geplaatst registreren dan het gedrag ter plaatse ten gevolge van de tik. Via computerberekeningen (Fast Fourier Analysis) ontstaat er dan een beeld van de trillende constructie.

Toen we deze techniek toepasten op een hydrostatische machine sprong de apparatuur op tilt. Bij de berekeningen ging men ervan uit dat de demping erg klein zou zijn en dat bleek niet het geval. Het kostte nogal wat tijd om bruikbare gegevens te verkrijgen. Dat zal nu hopelijk beter opgelost zijn.