

FAUST:

het vervaardigen van conische oppervlakken

Oliver W. Föhnle en Jacob-Jan Korpershoek

TNO-TPD, Postbus 155, 2600 AD Delft

Hedser van Brug, Cees J. van der Laan en Hans J. Frankena

Technische Universiteit Delft, Faculteit der Technische Natuurkunde

Vakgroep Optica, Lorentzweg 1, 2628 CJ Delft

Inleiding

De FAUST methode (Fabrication of A-spherical Ultraprecise Surfaces using a Tube) is in het vorige nummer van fotonica beschreven [Fäh96]: een gemodificeerde 'curve generator' die gebruik maakt van een buisvormig element met een niet-circulaire doorsnede, die werkt volgens het principe van 'loose abrasive' taai slijpen met aansluitend 'bowl feed' polijsten en die wordt toegepast voor het vervaardigen van optische oppervlakken. In dit artikel passen we FAUST toe voor het vervaardigen van rotationeel symmetrische oppervlakken met een longitudinal doorsnede in de vorm van een conische sectie (in het volgende verder aangeduid als conisch oppervlak [Mal92]).

Figuur 1 toont een verticale doorsnede van de productie opstelling en definieert twee coördinaat systemen, de ene ten opzichte van het werkstuk (r -, y - en f -as), de andere ten opzichte van de buis (x -, y -, en z -as). Deze twee coördinaat systemen zijn ten opzichte van elkaar verdraaid rond de y -as over een hoek van α graden.

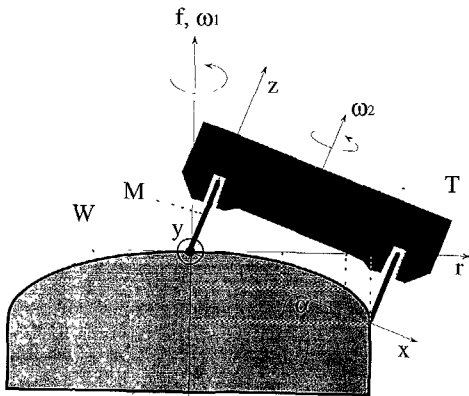
Conische oppervlakken

Conische oppervlakken kunnen met behulp van de functie $f_c(r)$ worden weergegeven, die de langsdoorsnede in het f , r -vlak beschrijft. Deze functie wordt gegeven door

$$f_c(r) = \frac{\pm r^2}{p + \sqrt{p^2 - r^2(k+1)}} \quad (1)$$

waarbij p de kromtestraal is in de top van het oppervlak, k de conische constante is en het plus- en min teken aangeeft dat het om respectievelijk een concaaf (hol) of een convex (bol) oppervlak gaat. Voor verschillende waarden van k worden verschillende typen van conische doorsneden beschreven voor $k < -1$ hyperbolen, voor $k = -1$ parabolen, voor $-1 < k < 0$ langwerpige ellipsen, voor $k = 0$ bollen, en voor $k > 0$ afgeplatte (oblong) ellipsen. Conische oppervlakken kunnen ook, met uitzondering van parabolen, beschreven worden met behulp van

$$\frac{f_c^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$



Figuur 1

Verticale doorsnede van de productie opstelling waarbij FAUST toegepast wordt. Het werkstuk is aangegeven met W, de buis met T en de bewerkende band met M.

waarbij a en b positieve constanten zijn voor ellipsen, en b een complexe constante is voor hyperbolen.

FAUST toepassen

We hebben voor alle typen van conische doorsneden de vorm van de buisrand vastgesteld, en constateerden dat deze in alle gevallen elliptisch moest zijn. We gaan nu onderzoeken wat voor oppervlak we verkrijgen indien we uitgaan van een bepaalde vorm van elliptische buis en daarbij de hoek α tussen buisrand en het werkstuk veranderen

Het gebruiken van een buis met een elliptische rand

Een elliptische buisrand (gedefiniëerd door de twee assen u en v , waarbij de v -as gericht is langs de x -as), onder een hoek α met het werkstuk, produceert een rotatie symmetrisch oppervlak. De vorm van het oppervlak volgt uit de functie $f(r)$, gegeven als

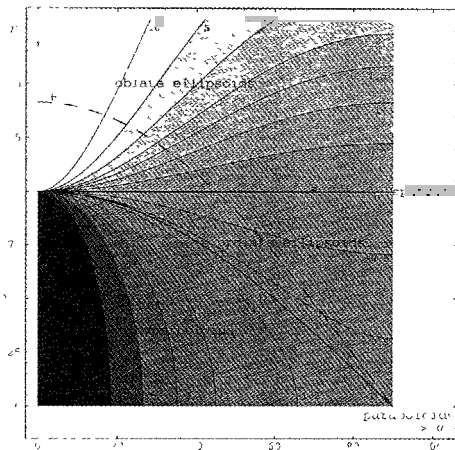
$$f(r) = \frac{\pm r^2 \sin \alpha}{vc^2 + \sqrt{v^2 c^4 - r^2(c^2 - (\cos \alpha)^2)}} \quad (3)$$

waarbij de positieve constante c gelijk is aan de verhouding tussen de twee assen van de ellips ($c = u/v$). Uit een vergelijking van Vgl (3) met Vgln (1) en (2) volgt dat (indien $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$) bij gebruik van een buis met een elliptische doorsnede altijd een conisch oppervlak verkregen wordt. Tabel 1 toont het verband tussen de parameters die een algemeen conisch oppervlak beschrijven (k , p , a en b) [Vgln. (1) en (2)] en de parameters die de buisrand beschrijven [Vgl (3)]. Zoals verwacht hangt k alleen van

de vorm van buisrand af (gegeven door c) en van de hoek α ; terwijl p daarnaast nog afhankelijk van de grootte van de buis (gegeven door v).

De vorm van het vervaardigde oppervlak

Figuur 2 toont een hoogtelijnen plaatje van

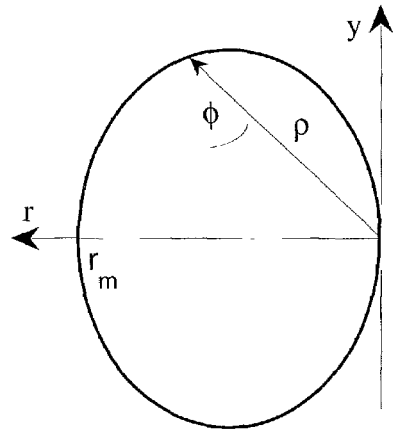


Figuur 2
Verband tussen de conische constante k en de parameters c en α

de functie $k(c, \alpha)$. Voor ieder type buis (gegeven door c) is de afhankelijkheid van de conische constante k met de hoek α (voor $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$) getoond. De conische constante loopt van $-\infty$ (met $c < 1$ en $\alpha \rightarrow 0$) naar $+\infty$ (met $c > 1$ en $\alpha \rightarrow 0$). Voor iedere buis (indien $c \neq 1$) zien we dat $|k(c)| \rightarrow \infty$ voor $\alpha \rightarrow 0$ en, indien de hoek α vergroot wordt, dat dan de conische constante gaat naar zijn limiet waarde van $c^2 - 1$ voor $\alpha = 90^\circ$. Een buis met een circulaire rand ($c = 1$) genereert altijd een bolvormig oppervlak. Dit

conische constante k	kromtestraal p in de top van het oppervlak	horizontale as b	verticale as a
$k(c, \alpha) = \frac{c^2}{(\sin \alpha)^2}$	$p(v, c, \alpha) = \frac{vc^2}{\sin \alpha}$	$b^2 = \frac{v^2 c^4}{c^2 - (\cos \alpha)^2}$	$a = \frac{vc^2 \sin \alpha}{(\cos \alpha)^2 - c^2}$

wordt in Figuur 2 aangegeven met de rechte lijn s , die samenvalt met de hoogtelijn $k=0$. Een buisrand met de vorm van een afgeplatte ellips ($c > 1$) genereert altijd een afgeplatte ellipsoïde ($k > 0$). Door de hoek α te variëren is het mogelijk om met behulp van die ene buis alle typen van afgeplatte ellipsoïden te verkrijgen waarvoor geldt dat $k \geq c^2 - 1$. Daarnaast is het mogelijk om met een buis met een langwerpige elliptische doorsnede ($c < 1$) drie typen oppervlak te verkrijgen, wederom afhankelijk van de hoek α . Voor $0 \leq \alpha < \alpha_n$ ligt de conische constante in het bereik $-\infty \leq k < -1$ en de buis genereert alle mogelijke hyperboloiden. Voor $\alpha = \alpha_n$, aangegeven door de lijn p in Figuur 2, geldt dat $k = -1$ en één specifieke paraboloid wordt verkregen. En als laatste, voor $\alpha_n < \alpha \leq 90^\circ$, genereert de buis alle mogelijke langwerpige ellipsoïden met $-1 < k \leq c^2 - 1$. Hier uit volgt dat het grootste aantal conische oppervlakken verkregen wordt met behulp van een buis met een nagenoeg circulaire doorsnede.



Figuur 3
Projectie van de buisrand op het r, y -vlak.

$$r_{max} = \cos\alpha \frac{vc^2}{c^2 - (\cos\alpha)^2} \quad (6)$$

De grootte van het vervaardigde oppervlak
Tijdens het productie proces beweegt de buis verticaal het oppervlak in. Hierdoor is de maximale straal r_w van het vervaardigde oppervlak (werkstuk radius) bepaald door de projectie van de buisrand in het r, y -vlak. Zoals aangegeven in Figuur 3 wordt de projectie beschreven door

$$\rho(r) = \sqrt{r^2 \left(1 - \frac{c^2}{\cos^2\alpha}\right) + \frac{2vc^2}{\cos\alpha} r} \quad (4)$$

• *Concaaf oppervlak (hol)*

Voor de vervaardiging van holle oppervlakken wordt de werkstuk radius bepaald door het maximum van de functie $\rho(r)$ in het interval $0 \leq r \leq r_m = 2vc\cos\alpha$. Deze functie is monotoon stijgend met r totdat het zijn maximum waarde bereikt

$$\rho(r_{max}) = \frac{vc^2}{\sqrt{c^2 - (\cos\alpha)^2}} = b \quad (5)$$

voor

Hieruit volgt dat het maximum van de functie $\rho(r)$ gelijk is aan de horizontale as van het gegenereerde oppervlak [Vgl.(5) en Tabel 1]. Voor $\alpha = 0$ is 100% van de buisrand in contact met het werkstuk en r_w wordt gegeven door het maximum van u en v . Bij het vergroten van de hoek tussen de buis en het werkstuk tot uiteindelijk de loodrecht stand (niet realistisch) komen we drie verschillende situaties tegen. Voor $0 < \alpha < \alpha_t$ vinden we dat $r_{max} > r_m$ en dat het maximum $\rho(r_{max})$ zich niet in het interval $0 \leq r \leq r_m$ bevindt. In dit geval heeft de buisrand overal contact met het werkstuk en wordt de werkstuk radius gegeven door $r_w = r_m = 2vc\cos\alpha < |b|$. Voor $\alpha = \alpha_t$, bevindt zich het maximum van $\rho(r_{max})$ bij $r_{max} = r_m$. Ook in dit geval is de buisrand geheel in contact met het werkstuk maar de buis genereert nu een halve ellipsoïde met $r_w = r_m = 2vc\cos\alpha_t = |b|$. De hoek α_t , die gegeven wordt door $\alpha_t = \arccos\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)$, wordt in

Figuur 2 aangegeven met de kromme t . Zoals verwacht is het niet mogelijk om hyper-

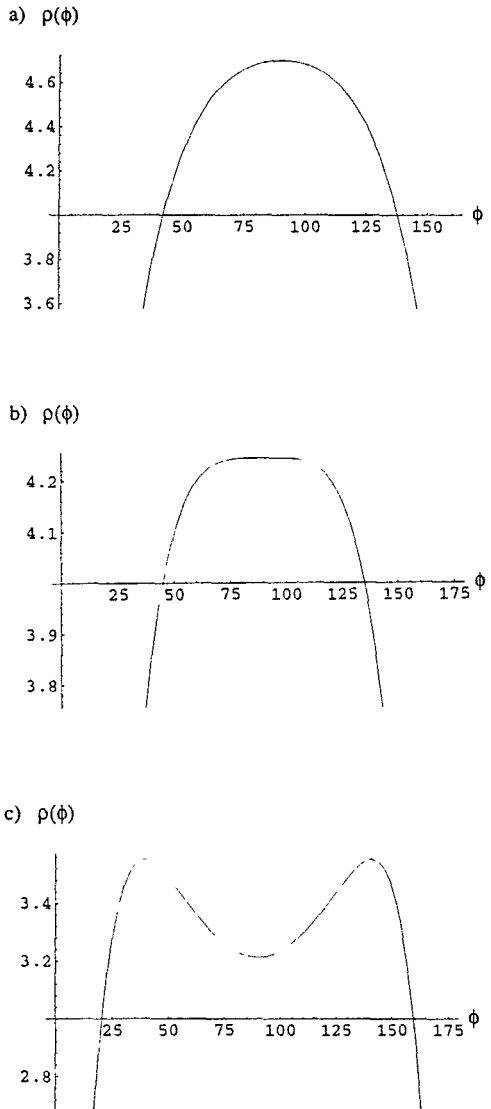
bolloïden en paraboloiden te maken met $r_w = |b|$ (b is niet gedefinieerd voor hyperboloiden en paraboloiden: het is een complex getal). Als laatste situatie hebben we $\alpha_t < \alpha \leq 90^\circ$. Nu is het maximum gesitueerd in het interval $0 \leq r \leq r_m$. De buis maakt nu slechts gedeeltelijk contact met het werkstuk, en genereert halve ellipsoïden ($r_w = \rho(r_{max}) = b$). Figuur 4 toont een voorbeeld van een buis met $c = 1.2$, waarbij gezien kan worden dat de buis gedeeltelijk contact verliest voor $\alpha > \alpha_t$, doordat het maximum van $\rho(\phi)$ opsplijt in twee pieken.

• *Convex oppervlak (bol)*

De werkstuk radius r_w is nu altijd gelijk aan $r_m = 2v \cos \alpha$. Voor $\alpha = 0$ is de gehele buis in contact met het werkstuk en wordt r_w gegeven door het maximum van u en v . Voor $0 < \alpha < \alpha_t$ is de buisrand eveneens geheel in contact met het werkstuk en geldt dat $r_w = r_m = 2v \cos \alpha < b$ totdat, voor $\alpha = \alpha_t$ geldt dat $r_w = r_m = b$. Voor $\alpha_t < \alpha \leq 90^\circ$ vinden we dat $r_w = r_m < b$ en de buisrand maakt slechts gedeeltelijk contact met het werkstuk en uiteindelijk vinden we $r_w = 0$ voor het niet realistische geval dat $\alpha = 90^\circ$

Conclusies

We hebben de vorm bepaald van het oppervlak dat verkregen wordt bij gebruik van een buisrand met een elliptische vorm en hebben aangetoond dat deze altijd een conisch oppervlak is. Vervolgens hebben we laten zien dat het mogelijk is om met een enkele elliptische buis verschillende typen conische oppervlakken te verkrijgen door de oriëntatie van de buis ten opzichte van het oppervlak te veranderen. Een buis met een langwerpige elliptische rand produceert (afhankelijk van de hoek tussen de buisrand en het werkstuk) alle typen van hyperboloiden, een enkele paraboloid en een verscheidenheid aan langwerpige ellipsoïden. Een buis met een afgeplatte elliptische rand produceert altijd afgeplatte ellipsoïden. In Figuur 2 staat een kromme, aangegeven met een t , die de scheidslijn vormt tussen hoeken waarvoor de buis geheel contact maakt met het werkstuk (voor



Figuur 4
 ρ als een functie van ϕ [Zie Fig 3] voor een buis met $c = 1.2$, $u = 3$, $v = 2.5$. Van boven naar beneden a) $\alpha = 20^\circ$, b) $\alpha = 39.9^\circ$ en c) $\alpha = 50^\circ$,

hoeken kleiner dan die door t aangegeven), en die waarvoor de buis slechts gedeeltelijk contact maakt (voor hoeken groter dan die door t aangegeven).

Het is mogelijk, voor de vervaardiging van een bepaald conisch oppervlak een combinatie te bepalen van de conische constante en de hoek tussen buisrand en werkstuk volgens de hoogtelijn die behoort bij dat type conische oppervlak. Door de buisgrootte aan te passen, hetgeen mogelijk is door het kiezen van de lengte van de v-as, wordt het gewenste oppervlak verkregen. Dit is zinvol voor de optimalisatie van de productie methode: de vorm van het geproduceerde oppervlak is voor kleine hoeken minder gevoelig voor fouten in de buisrand dan voor grotere hoeken. Daarbij komt ver-

volgens nog dat, indien we de kleinst mogelijke hoek kiezen die nog voldoet aan de eis van het werkstuk radius, dat we dan altijd bij een zo circulaair mogelijke vorm van de buisrand belanden. Op deze manier is de FAUST methode voor het vervaardigen van conische oppervlakken te optimaliseren.

Referenties

- [Fah96] Fähnle, Korpershoek, van Brug, van der Laan en Frankena. Ned. Tijdschrift voor Fotonica, 22(2), pp.11-15.
- [Mal92] Malacara, "Optical Shop Testing", Wiley Series in Pure and Applied Optics, p.743,1992